[Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"](http://go.to/pi314)
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

John Wallis
(1616 - 1703)

Un autre produit infini concernant Pi

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1} \qquad \frac{2^{4n+2}\,n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

$$\frac{2^{4n+2}\left(n+\frac{3}{4}\right)(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Tranches de vie

John Wallis est né à Ashford, c'est le fils du recteur de la ville. Assez précoce, il se tourna vers les mathématiques à *15* ans, mais il ne dédaigna pas non plus la physique où il donna des lois sur les chocs des corps durs... Il est le premier à utiliser correctement l'infini (le fameux symbole est une de ses créations), les exposants négatifs nuls et fractionnaires. Passionné par les formules et approximations infinies qui en découlent (*Arithmética infinitorum 1656*), il entrevit la représentation géométrique des complexes et la réciprocité de l'exponentielle et du logarithme népérien. Cet esprit fertile s'intéressa également à l'astronomie, la musique, la botanique et fut l'un des membres fondateurs de la Royal Society (*1663*). Un homme d'importance donc !

Autour de π :

Bien sûr, Wallis tient une part importante dans la légende de *Pi* puisque ce fut le premier à découvrir le développement de la fameuse constante en un produit infini de fractions rationnelles. La convergence est exécrable, bien sûr, mais quel beau résultat !

Démonstration

Une démo très classique, mais un modèle de simplicité.
La méthode originale de Wallis consistait à utiliser les intégrales $\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$ dont Wallis connaissait le résultat. Il généralisa à $n=1/2$ ce qui donne l'aire du quart de cercle de rayon *1*, soit $\pi/4$.
En notations modernes, introduisons les intégrales équivalentes (changement de variable

$x=sin(u)$ et $x=cos(u)$) dites de Wallis :

$$\forall n \in N \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$$

Ces intégrales sont en fait égales (changement de variable $x=\pi/2-t$) donc, on ne s'intéressera qu'à I_n...

Effectuons une petite intégration par partie pour $n>1$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}(x)\cos(x)\,dx = \left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)\,dx$$

or $\left[\cos^{n-1}(x)\sin(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \quad et \quad \sin^2(x) = 1-\cos^2(x)$ donc on obtient :

$I_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}(x) - \cos^n(x)\,dx = (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right)$ et finalement :

$$I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2} \quad (1)$$

Cette relation de récurrence permet de ramener le calcul de I_n à celui de I_0 et I_1 pour n pair puis impair.

On a immédiatement $I_0=\pi/2$ et $I_1=1$ ce qui donne :

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2.4.6\ldots(2n)}{1.3.5\ldots(2n+1)} I_1 = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \quad (2)$$

par récurrence immédiate, puis par un calcul hyper-classique ! (procéder par récurrence par exemple)

Et de même, on a :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)} I_0 = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \quad (3)$$

Or, sur $]0,\pi/2[$, $cos(x)<1$ donc $cos^n(x)<cos^{n-1}(x)$, donc $n \to cos^n(x)$ est décroissante et $n \to I_n$ est décroissante.

On en conclut que pour $n>1$, on a :

$$I_{2n+1}<I_{2n}<I_{2n-1}$$

D'après (2) on a :

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

donc d'après le théorème des gendarmes,

$$I_{2n} \overset{n\to\infty}{\sim} I_{2n+1} \quad donc \quad \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

et finalement :

$$\frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \quad (4)$$

Chouette, non ?

La première formule proposée en haut de la page est en fait la même, nous allons le voir :

$$2\prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1} = 2\frac{\left(\prod_{n=1}^{k}4\right)\left(\prod_{n=1}^{k}n\right)^2}{\prod_{n=1}^{k}(2n-1)\prod_{n=1}^{k}(2n+1)} = 2\frac{4^k(k!)^2}{(2k)(2k+1)\left(\prod_{n=1}^{k}(2n-1)\right)^2}$$

et, j'espère que vous en conviendrez aisément, $\prod_{n=1}^{k}(2n-1) = \frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!}$ par une récurrence évidente (que j'ai d'ailleurs la flemme d'écrire...).
On obtient alors finalement :

$$2\prod_{n=1}^{k}\frac{4n^2}{4n^2-1} = 2\frac{2^{2k-2}4^k(k!)^2((k-1)!)^2}{(2k+1)((2k-1)!)^2} = \frac{2^{4k-1}(k!)^2(k!)^2(2k)(2k)}{k^2(2k+1)!(2k)!} = \frac{2^{4k+1}(k!)^4}{(2k)!(2k+1)!} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

d'après (4), et voilà. Le tour est joué !

A noter que l'on aura besoin de la formule de Wallis pour la démonstration de la formule de Stirling, et que réciproquement, cette dernière donne directement la formule de Wallis en faisant :

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{2n}e^{-2n}2\pi n}{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi n}}{2^{2n}} \Leftrightarrow \pi \xleftarrow{n\to\infty} \frac{2^{4n}((n!))^4}{n((2n)!)^2} \overset{n\to\infty}{\sim} \frac{2^{4n+2}n(n!)^4}{((2n+1)!)^2}$$

Ah ! Wallis et Stirling, quelle liaison intime et légendaire...

Essais

Bon, je l'ai déja dit, la convergence est éxécrable, logarithmique...

n=10	*3,0677 (0)*
n=1000	*3,1408 (2)*
n=10 000	*3,14151402 (4)*
n=100 000	*3,1415847 (4)*

Environ *Log(n)*, pas très heureuse...

Note d'optimisme...

Rien n'empêche en effet d'ajouter un petit quelque chose dans la suite ! Le *3/4* de la *3*e formule en haut de la page provient d'une observation empirique. On a déjà :

n=10	*3,1407 (2)*
n=100	*3,1415829 (4)*
n=1 000	*3,141592555 (6)*
n=3 000	*3,14159264 2 (7)*

Environ *2Log(n)* en convergence, presque honorable vu la simplicité de la suite !

Et le *Delta2* d'Aitken fonctionne bien, on a en effet :

n=10	*3,1008 (1)*
n=100	*3,1376(1)*
n=1 000	*3,14119 (3)*

et encore mieux si l'on ajoute ce fameux *3/4* :

n=10	*3,14125 (2)*
n=100	*3,141589 (4)*
n=1 000	*3,14159262084 (7)*

Finalement, il y a bien des moyens de faire quelque chose pour cette suite !

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr