Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Triangle des c(n,k)

Un résultat original

$$\forall n \in N, \quad soit \quad C_n = \frac{d^n f}{dx^n}(0) \quad où \quad f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{(2n+2)C_n}{C_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Autour de π

La formule ci-dessus est l'expression analytique de la définition des *c(n,k)*. (dans ce cas, on a *k=n*)

Mais en *1966*, Entringer fut le premier à construire le tableau ci-dessous qui résulte de la répartition des permutations up-down suivant les valeurs de leur premier terme.
Pour ce faire, formons le triangle des entiers *c(n,k)*, *(0≤k≤n)* dans lequel chacun des entiers *c(n,k)* (à ne pas confondre avec les combinaisons) est la somme des *k* derniers termes de la ligne *n-1* :

c(n,k)	*k=0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
n=0	*1*								
1	*0*	*1*							
2	*0*	*1*	*1*						
3	*0*	*1*	*2*	*2*					
4	*0*	*2*	*4*	*5*	*5*				
5	*0*	*5*	*10*	*14*	*16*	*16*			
6	*0*	*16*	*32*	*46*	*56*	*61*	*61*		
7	*0*	*61*	*122*	*178*	*224*	*256*	*272*	*272*	
8	*0*	*272*	*544*	*800*	*1024*	*1202*	*1324*	*1385*	*1385*

Les nombres c_n semblent être connus depuis Euler et admettent comme définition celle du haut de la page.
En *1879*, Désiré André leur a trouvé la propriété d'être également le nombre de permutations up-down des entiers de *1* à *n* (cela signifie que les *n-1* différences successives de deux termes consécutifs de la permutation sont alternativement positive, négative positive, etc...). On appelle aussi cela dans notre bonne vieille langue de Molière les "alternantes" ou "alternances d'André" ce qui est bien mérité ! (merci pour cette précision de Serge Bouc)
Par exemple, $c_4=5$ et l'on a en effet *5* permutations up-down de $\{1,2,3,4\}$:

1 3 2 4 *1 4 2 3* *2 3 1 4* *2 4 1 3* *3 4 1 2*

Pour *1 3 2 4*, on a bien $3-1=2$, $2-3=-1$, $4-2=2$

Notons ensuite $c_n=c(n,n)$. on a alors $\frac{(2n+2)c_n}{c_{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$

Principe de la démo

En fait, on peut montrer que la série entière de terme général $c_n \frac{z^n}{n!}$ admet $\pi/2$ pour rayon de convergence, (ce qui semble logique si l'on considère la validité du développement de Taylor de la fonction f définie comme en haut).

Donc, le rapport des coefficients devant z^n tend alors forcément vers $\pi/2$ d'après le résultat de d'Alembert.

Essais

La fraction donne une valeur approchée de Pi par défaut si n est pair et par excès sinon :

n=0	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
2	*4*	*3*	*3,2*	*3,125*	*3,147*	*3,1397*	*3,1422*	*3,14138*	*3,1416*	*3,141569*

On dirait une convergence logarithmique, mais je n'en ai pas la preuve...

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr