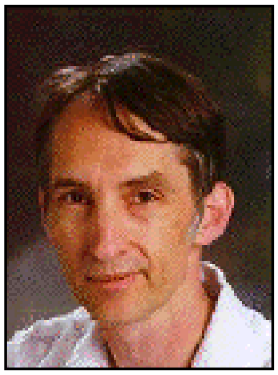
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Eugène Salamin / Richard Brent

Suites inspirées par la formule de Brent/Salamin :

1) Formule originelle Brent/Salamin *1976* (*Mathématics of computation*)

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi$$

2) Suite assez évidente que je n'ai bizarrement trouvée nulle part !

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_0 = 0 \qquad v_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n b_n + a_n v_n}{2 b_{n+1}}$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{v_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{u_n} \overset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{v_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

3) Variation des frères Borwein *1984*

$$a_0 = \sqrt{2} \qquad b_0 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_n}} \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\,(1 + b_n)}{a_n + b_n}$$

$$p_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad p_{n+1} = p_n b_{n+1} \frac{1 + a_{n+1}}{1 + b_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

4) Frères Borwein *1987* (*Pi and the AGM*)

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2+\sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1}\frac{1+y_n}{1+z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Une autre suite d'après une observation de Salamin

Je n'ai pas encore testé ces algorithmes.

Convergence quadratique

$$f(k) = k.2^{-\frac{k}{4}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-k\frac{n(n-1)}{2}}\right]^2 \qquad g_0 = \frac{f(n)}{f(2n)} \qquad g_k = \sqrt{\frac{1}{2}\left(g_{k-1}+\frac{1}{g_{k-1}}\right)}$$

$$\pi = 2\ln(2)f(n)\prod_{k=1}^{\infty} g_k$$

Convergence cubique

Cet algorithme converge vers le plus proche multiple de *Pi* de f_0.

$f_n=f_{n-1}+\sin(f_{n-1})$

Je n'ai malheureusement pas trouvé les démonstrations de ces algorithmes...

Tranches de vie

Et je n'ai pas trouvé grand-chose non plus sur Salamin ou très peu... comme cette photo le montrant en compagnie des plus grands chercheurs sur *Pi* (Bailey, Gosper, Kanada...)
Sur Brent, par contre, tout va bien ! Richard Brent est un mathématicien australien né en *1946*. Il est pour l'instant professeur à Oxford et est spécialiste des algorithmes. Pour plus de renseignements, vous pouvez allez visiter sa page personnelle.

Autour de π

La formule originelle a été découverte en *1973* et publiée en *1976* par Eugène Salamin dans l'article *Computation of Pi* dans la revue *Mathematics of computation* . Elle fut publiée au même moment et indépendamment par Richard Brent également (qui est d'ailleurs maintenant directeur de *Mathematics of computation* !). Il est vrai que la coutume est de l'appeler algorithme de Salamin, mais n'oublions pas ce cher Brent !
Cette formule est la première véritable découverte importante concernant le calcul de *Pi* depuis les formules d'arctan et celles de Ramanujan. La force de cet algorithme est de proposer une convergence quadratique (2^n comme je le note habituellement sur ce site) c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération ! Une fusée !
Bien sûr, la démonstration est à la hauteur de la performance, d'une longueur très pénible... Mais j'ai passé un tel temps vainement sur Internet à la recherche de cette démonstration lorsque j'en avais besoin pour mon dossier sur *Pi* (voir page perso) que je ne peux résister à la publier ici...

Elle repose sur la moyenne arithmético-géométrique qui fut étudiée par Legendre et Gauss, mais ce dernier, pour une fois (!), ne vit pas l'intérêt qu'elle pouvait avoir pour le calcul de *Pi* !

Démonstration

C'est parti pour les algorithmes 1), 2) et 4) ! Je vais tenter de bien structurer l'affichage des résultats car le web n'est pas ce qu'il y a de plus pratique pour des démonstrations mathématiques!

Moyenne arithmético-géométrique

Soient a et b deux réels positifs ou nuls. On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

I Convergence

> Lemme 1 : (a_n) et (b_n) sont convergentes et de même limite. De plus, (a_n) est décroissante et (b_n) est croissante. Cette limite est notée $M(a,b)$ et appelée Moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Démonstration

I.a) Montrons que pour $n>0$ et $a\#b$,

$$\left| \begin{array}{l} 0 \le b_n \le b_{n+1} < a_{n+1} < a_n \quad (1) \\ a_{n+1} - b_{n+1} \le \frac{1}{2}\left(a_n - b_n\right) \quad (2) \end{array} \right.$$

- En effet, si $a=b$, on a immédiatement pour tout n entier $a_n=a=b_n$
- Si $a=0$ ou $b=0$, on a (tout aussi immédiatement !) pour tout entier n $b_n=0$ et $a_{n+1}=a_n/2$ ce qui assure bien (1) et (2)
- Si $a>0$ et $b>0$, $a\#b$

  I.a).(1) Une petite récurrence pour (1) pour bien commencer !

  $n=1$: $a\#b$ donc $\left(\sqrt{\frac{a}{2}} - \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 > 0 \;\; donc \;\; \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ en développant, donc $b_1<a_1$, et en refaisant de même, $b_2<a_2$.

  De plus, $a_2=a_1/2+b_1/2<a_1/2+a_1/2=a_1$ donc $a_2<a_1$ et $b_2>(b_1^{\,2})^{1/2}=b_1$ donc, finalement, on a le résultat (1) au rang 1

  Supposons maintenant le résultat (1) valable pour k dans $[[1,n]]$...

Puisque $b_n<a_n$, on a de même $(a_nb_n)^{1/2}<(a_n+b_n)/2$ donc $b_{n+1}<a_{n+1}$ et $a_{n+1}<2a_n/2=a_n$ et

enfin $b_{n+1}>(b_n^2)^{1/2}=b_n$

Donc $0<b_n<b_{n+1}<a_{n+1}<a_n$

C'est sacrément l'hypothèse au rang suivant, donc par le théorème de récurrence, le résultat (1) est bien valable pour tout entier n non nul...

I.a).(2) Pour tout n>0, on a :

$$2\left(a_{n+1}-b_{n+1}\right)=a_n+b_n-2\sqrt{a_nb_n}=\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}\right)^2=\left(a_n-b_n\right)\left(\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{b_n}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n}}\right)<\left(a_n-b_n\right)$$

C'est bien le résultat (2) !

I.b) Montrons maintenant que ces suites sont convergentes :

- Si $a=b$ on a pour tout n $a_n=b_n$ et donc (difficile !) $\lim_{n\to\infty} a_n=a=\lim_{n\to\infty} b_n$
- Si $b=0$, $a\#0$ on a pour tout $n>0$: $b_n=0$ et $a_n=a_{n-1}/2=a_0/2^n$ donc $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=0$
- Si $a=0$, $a_n=0$ et donc $b_n=0$ pour tout n, ce qui règle l'affaire de la limite !
- Si $a>0$, $b>0$, $a\#b$
  _ D'après I a) (1) (b_n) est croissante, et (a_n) est décroissante

  _ De plus, d'après I a) (2) et par récurrence immédiate, $a_n-b_n<(a_1-b_1)/2^{n-1}$ donc $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$, tiens !
  Ne serait-ce pas des suites adjacentes ? Mais oui ! Elles convergent alors vers une même limite que nous noterons donc $M(a,b)$

II Propriétés de la moyenne AGM (arithmético-géométrique)

II.a) $M(a_n,b_n)=M(a,b)$ II.b) $M(a,b)=M(b,a)$ II.c) $M(ßa,ßb)=ßM(a,b)$ pour n entier, $ß>0$, $a>0$, $b>0$

Démonstration

II.a) Soit $n_0>0$

$(a_{no+k})_k$ et $(b_{no+k})_k$ ont même limite que $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ donc, $M(a_{no},b_{no})=M(a,b)$

II.b) Soient (a'_n) et (b'_n) les suites définies comme (a_n) et (b_n), mais avec $a'_0=b$ et $b'_0=a$

On a $a'_1=a_1$ et $b'_1=b_1$ donc d'après I. a) avec $n=1$, on a $M(a,b)=M(b,a)$

II.c) De même, si on définit (a''_n) et (b''_n) par $a''_0=ßa_0$ et $b''_0=ßb_0$, on a immédiatement pour tout n :
$a''_n=ßa_n$ et $b''_n=ßb_n$.
Donc, en passant à la limite, $M(ßa,ßb)=ßM(a,b)$

III Fonction $f(x)=M(1,x)$

Nous voici au coeur de la démonstration : Pour $a=1$ et $b=x$, les résultats précédents (convergence...) nous permettent de construire une fonction f définie par :
pour x réel positif ou nul,

$$f(x)=M(1,x)$$

Les résultats intéressants sur cette fonction sont :

III.a) Lemme 2

f est continue sur $[0,+\infty[$

Démonstration

Dans le cas $a_0=a=1$ et $b_0=b=x$, nous allons montrer la convergence uniforme des suites (a_n) et (b_n) sur tout compact de R^+ vers la fonction f. Pour bien différencier ce cas de l'étude précédente, je noterai respectivement (U_n) et (V_n) ces suites de fonctions...

III.a).1) Montrons que pour tout n entier, U_n et V_n sont continues sur R^+

Par récurrence, par exemple !
$n=0$: $U_0(x)=1$, $V_0(x)=x$, no comment !
Supposons le résultat jusqu'à un certain n entier,
$U_{n+1}=(U_n+V_n)/2$ et $V_{n+1}=(U_nV_n)^{1/2}$ donc U_{n+1} et V_{n+1} sont clairement continues comme composées de fonctions continues...
Le théorème de récurrence se vérifie donc, U_n et V_n sont continues pour tout n sur R^+.

III.a).2) Montrons la convergence uniforme de U_n et V_n vers f sur tout compact de R^+ :

- D'après I.a).1). on a $\forall n\geq 0$, $b_n\leq M(a,b)\leq a_n$ donc :

$\forall x \in R^{+}$, $V_n(x) \leq f(x) \leq U_n(x)$ donc :

$0 \leq U_n(x)-f(x) \leq U_n(x)-V_n(x) < (U_{n-1}(x)-V_{n-1}(x))/2 < |1-x|.2^{-n}$ pour tout $x \in R^{+}$

- Plaçons nous sur un compact $[A,B]$ de R^{+}
  $\forall n \in N^*$, $0 \leq U_n(x)-f(x) \leq (B+1)2^{-n}$

  De même, $0 \leq f(x)-V_n(x) \leq U_n(x)-V_n(x) < |1-x|2^{-n} \leq (B+1).2^{-n}$

  Cette majoration est uniforme, il y a donc convergence uniforme de (U_n) et (V_n) vers la fonction f sur tout compact de R^{+}

Donc f est continue sur $[0,+\infty[$, déja un premier résultat très important !

III.b) Lemme 3

$\boxed{f \text{ est croissante sur } [0,+\infty[}$

Démonstration

III.b).1) Montrons par récurrence (encore !) sur $n \in N$ que (Un) et (Vn) sont croissantes sur $[0,+\infty[$
$U_0=1$ et $V_0=x$ donc on a le résultat pour $n=0$

Supposons que le résultat soit valable pour un certain n∈N
U_n et V_n étant croissantes, U_n+V_n et $(U_nV_n)^{1/2}$ aussi donc U_{n+1} et V_{n+1} le sont également et c'est l'hypothèse au rang suivant !
Le résultat est bien valable pour tout $n \in N$.

III.b).2). Soient $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ avec $x_1 < x_2$

Puisqu'il y a convergence uniforme de (U_n) vers f, on a $f(x_2)-f(x_1)= \lim_{n \to \infty} (U_n(x_2)-U_n(x_1))$

or $\forall n \in N^*$, $U_n(x_2)-U_n(x_1) \geq 0$ (croissance de U_n), donc $f(x_2)-f(x_1) \geq 0$, ce qui nous assure la croissance de f sur $[0,+\infty[$, et voilà, fin de la démonstration du lemme 3 !

III.c) Lemme 4 (Etude aux bornes...)

f admet une tangente verticale en $x=0$
En 0, $\lim f=0$
En $+\infty$, $\lim f=+\infty$, $f(x)=o(x)$

Démonstration

III.c).1) on a $x^{1/2}=V_1(x)\leq f(x)\ \forall x\in R^{+*}$, donc $x^{-1/2}\leq f(x)/x$ et finalement :

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$$

donc f admet une tangente verticale en $x=0$.

Si $x=0$, pour $n\geq 1$ $U_n(x)=U_{n-1}(x)/2=2^{-n}$, et $V_n(x)=0$ donc $f(0)=0$

III.c).2) D'après II.b) et II.c),
$\forall x\in R^{+*}$, $f(x)=M(1,x)=xM(1/x,1)=xM(1,1/x)=xf(1/x)$

Quand $x\to+\infty$ $\lim f(1/x)=f(0)=0$ car f est continue en 0
donc $f(x)/x\to 0$ et en $+\infty$, $f(x)=o(x)$

De plus $\forall x\in R^{+*}$, $f(x)\geq x^{1/2}$, donc en $+\infty$, $\lim f=+\infty$

III.d) Théorème 5

f est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

Ce résultat très fort (presque trop puisque nous n'aurons besoin que du caractère C^1 !) n'est pas simple à démontrer. Il va même nous entraîner dans la théorie des intégrales elliptiques !
Ainsi, nous allons successivement :
III.d).1) Exprimer $M(a,b)$ par une intégrale elliptique $I(a,b)$
III.d).2) Appliquer ce résultat à la fonction f
III.d).3) Utiliser le caractère C^∞ de $I(1,x)$ pour en déduire celui de f !

Démonstration

III.d).1) On s'intéresse tout d'abord à l'intégrale suivante,
Soient $a,b>0$, on pose :

$$I(a,b)=\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$$

III.d).1).i) Convergence

Soit $m(t)=\dfrac{1}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}} \underset{t\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ et $m(0)=1/(ab)$, or m étant bien sûr continue sur R^+, m est intégrable sur R^+ et donc $I(a,b)$ est bien définie...

III.d).1).ii) Changement de variable

Posons $\begin{cases} \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\to R^+ \\ y \to b\tan(y) \end{cases}$

c'est une bijection croissante donc effectuons un petit changement de variables... Posons $t=b.\tan(y)$, on obtient :

$$I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b.\,dy}{\cos^2(y)\sqrt{(b^2\tan^2(y)+a^2)(b^2\tan^2(y)+b^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2\cos^2(y)+b^2\sin^2(y)}}$$

III.d).1).iii) fonction g

On définit la fonction g par $g(x)=I(1,x)$

Montrons qu'elle est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$

Soit $h(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}}$ avec $(x,y)\in]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Montrons par récurrence sur $n\in N$ (toujours !) que $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}$ existe et est continue sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Pour cela, montrons en même temps, toujours par récurrence, qu'avec les hypothèses sur les paramètres :

$$\frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,y)=\frac{P_n(x,y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^{2n+1}} \text{ où } x \to P_n(x,y)\in R_n[x]$$

- $n=0$, c'est la définition même de h !
  h est clairement continue sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$ et admet une dérivée partielle selon x
- n=1 : $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y)=\dfrac{-x\sin^2(y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^3}$
  C'est bien la forme annoncée pour $n=1$ et c'est parfaitement continu sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$
- Supposons maintenant le résultat pour un certain $n\in N$

$$\frac{\partial^{n+1}h}{\partial x^{n+1}}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{P_n(x,y)}{\left(\sqrt{\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)}\right)^{2n+1}}\right)=\frac{P'_n(x,y)\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)-P_n(x,y)\left(n+\frac{1}{2}\right)(2x\sin^2}{\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)^{n+\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{P_{n+1}(x,y)}{\left(\cos^2(y)+x^2\sin^2(y)\right)^{\frac{2(n+1)+1}{2}}}$$

ce qui est bien le résultat attendu avec P_{n+1} de la forme voulue... P_{n+1} est un polynôme en x et un polynôme trigonométrique en y et est donc à ce titre continu sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$ et dérivable selon x. De même pour le dénominateur, donc l'hypothèse est vérifiée au rang $n+1$, ce qui achève la récurrence !

h est donc de classe C^∞ sur $]0,+\infty[*[0,\pi/2]$

Puisque l'on se place sur le segment $[0,\pi/2]$ pour y, la fonction g définie par :

$$g(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x,y)dy$$

est elle même de classe C^∞ sur R^{+*} et l'on a :

$$g^{(n)}(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,y)dy$$

$x \to I(1,x)$ est donc une fonction de classe C^∞ sur R^{+*}

Reste à exprimer $M(a,b)$ en fonction de $I(a,b)$

C'est là bien sûr le principal résultat de cette étude et il fut obtenu par Gauss (il n'a pas été plus loin !).

III.d).1).iv) Montrons tout d'abord que :

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=I(a,b)$$

Pour cela, posons $j(t)=\frac{\left(t^2-ab\right)}{2t}$ définie sur R^{+*} et qui est clairement une bijection de R^{+*} sur R ($j'(t)=\frac{\left(t^2+ab\right)}{2t^2}>0$) donc, dans $I(1,t)$ définie au 1), on pose $s=\frac{\left(t^2-ab\right)}{2t}$ et on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{\left(s^2+ab\right)\left(s^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\left(t-\frac{ab}{t}\right)^2+ab\right)\left(\frac{1}{4}\left(t-\frac{ab}{t}\right)^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}=$$

$$\frac{4t^2}{\sqrt{\left(t^4+\left(ab+b^2\right)t^2+ab^3\right)\left(t^4+\left(ab+a^2\right)t^2+a^3b\right)}}=\frac{4t^2}{\left(t^2+ab\right)\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}$$

et d'autre part, ds=$\frac{\left(t^2+ab\right)}{2t^2}$dt, donc on obtient finalement :

$$I\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(s^2+ab\right)\left(s^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}}ds=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}dt$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(t^2+a\right)\left(t^2+b\right)}}dt=I(a,b)$$

L'avant dernière égalité étant obtenue grâce à la parité du terme sous l'intégrale

---

III.d).1).v) Alors, on avance bien, montrons maintenant que $M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}$

On a clairement *I(ßa,ßb)=I(a,b)/ß* donc :

$$I(a,b)=I(a_0,b_0)=I\left(\frac{a_0+b_0}{2},\sqrt{a_0b_0}\right)=I(a_1,b_1)=\ldots=I(a_n,b_n)=\frac{1}{a_n}I\left(1,\frac{b_n}{a_n}\right)=\frac{1}{a_n}g\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

or $\lim_{n\to\infty} a_n=M(a,b)$ et on a $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n=1$.

De plus, g est continue sur R^{+*} d'après iii) donc :

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{b_n}{a_n}\right)=g(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dy}{\sqrt{\cos^2(y)+\sin^2(y)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dy=\frac{\pi}{2}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$M(a,b)=\frac{\pi}{2I(a,b)}$$

III.d).2) en appliquant ce résultat à la fonction *f*, on obtient

$$\forall x \in R_+^* \quad M(1,x) = \frac{\pi}{2\,I(1,x)} \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{2\,g(x)}$$

III.d).3) Et la démonstration du théorème *5* est finie, *g* étant C^∞ sur R^{+*}, *f* l'est également sur le même intervalle

Petite note : *f* est continue en *0* mais n'est pas dérivable en *0* d'après le lemme 4...

III.e) Comportement asymptotique de f

Nous allons chercher des équivalents de *f* aux bornes de R^+ au moyen d'équivalents de *g*

Lemme 6

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)} \qquad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}}$$

Démonstration

III.e).1) Une nouvelle expression de g !

Posons à tout hasard (!) $s=x/t$:

$$\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} = \int_{+\infty}^{\sqrt{x}} -x\frac{ds}{s^2\sqrt{\left(\frac{x^2}{s^2}+1\right)\left(\frac{x^2}{s^2}+x^2\right)}} = \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s^2+x^2)(s^2+1)}} \quad \text{donc}$$

$$g(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+x^2)(t^2+1)}} = 2\int_0^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}$$

III.e).2) Trouvons maintenant un équivalent de g au voisinage de 0

$\forall\, t\in[0,x^{1/2}]$, on a $1\leq 1+t^2 \leq 1+x$, donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} \le g(x) \le \int_0^{\sqrt{x}}\frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} \quad \text{donc} \quad g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \int_0^{\sqrt{x}}\frac{2\,dt}{\sqrt{t^2+x^2}} = 2\left[\ln\left(\sqrt{t^2+x^2}+t\right)\right]_0^{\sqrt{x}}$$

$$= 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1+\sqrt{1+x}\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} 2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}(2+o(x))\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -2\ln\left(\sqrt{x}\right) \quad \text{donc} \quad \underline{\underline{g(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)}}$$

donc d'après III.d).2) on a :

$$f(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\frac{\pi}{2\ln(x)} \qquad f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{\pi x}{2\ln(x)}$$

la deuxième équivalence étant obtenue trivialement grâce à III.c).2) (*f(x)=x.f(1/x)*)

IV Expression de *Pi* en fonction de *f* et *f'*

Nous allons montrer que $\pi = 2\sqrt{2}\,\dfrac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$

Pour cela, on restreint U_n et V_n à *]0,1[* et on introduit W_n et k_n, fonction définie sur *]0,1[* par :

$$W_n = \sqrt{U_n^2 - V_n^2} \text{ et } k_n = \frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$$

Ces fonctions sont évidemment bien définies et positives car d'après III a)2) $0<V_n(x)<U_n(x)$ sur *]0,1[*

IV.a) Convergence de $(k_n)_n$

IV.a).1) Propriété

$2M(U_{n+1},W_{n+1})=M(U_n,W_n)$
$M(U_n,W_n) = \frac{1}{2^n}\, f'\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

Démonstration

$$\forall n \in N \quad W_{n+1} = \sqrt{U_{n+1}^2 - V_{n+1}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n^2 + V_n^2 + 2\,U_n V_n - 4\,U_n V_n} = \frac{U_n - V_n}{2} \quad donc$$

$$M\left(U_{n+1},\, W_{n+1} \right) = M\left(\frac{U_n + V_n}{2}, \frac{U_n - V_n}{2} \right) = \frac{1}{2} M\left(U_n + V_n, U_n - V_n \right)$$

Posons $a=U_n+V_n=a_0$, $b=U_n-V_n=b_0$ comme au I, on a

$$M\left(U_{n+1},\, W_{n+1} \right) = \frac{1}{2} M\left(U_n + V_n, U_n - V_n \right) = \frac{1}{2} M(a, b) = \frac{1}{2} M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab} \right) = \frac{1}{2} M\left(U_n, \sqrt{U_n^2 - V_n^2} \right) = \frac{1}{2} M\left(U_n, W_n \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} M\left(U_0,\, W_0 \right) = \frac{1}{2^{n+1}} M\left(1, \sqrt{1 - x^2} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} f\left(\sqrt{1 - x^2} \right)$$

IV.a).2) Convergence

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} 2^n f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right) = \frac{f\left(\sqrt{1 - x^2} \right)}{f(x)}}$$

Démonstration

$$\lim_{n \to \infty} 2^n f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right) = \lim_{n \to \infty} 2^n M\left(1, \frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n M\left(U_n(x), W_n(x) \right)}{U_n(x)} = \frac{f\left(\sqrt{1 - x^2} \right)}{f(x)}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1 - x^2} \right)}}$$

Démonstration

$$\lim_{n \to \infty} \frac{W_n(x)}{U_n(x)} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{1 - \frac{V_n^2(x)}{U_n^2(x)}} = \sqrt{1 - 1} = 0$$

donc d'après l'étude asymptotique du III e), on obtient :

$$f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right) \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{-\pi}{2 \ln\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right)} = \frac{\pi 2^{-(n+1)}}{k_n(x)} \quad et \quad f\left(\frac{W_n(x)}{U_n(x)} \right) \underset{n \to \infty}{\sim} 2^{-n} \frac{f\left(\sqrt{1 - x^2} \right)}{f(x)}$$ d'après la propriété

précédente, ce qui permet en rapprochant les deux égalités de conclure à :

$$\lim_{n\to+\infty} k_n(x) = \frac{\pi}{2}\frac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$$

fort !

IV.b) Convergence de $(k'_n)_n$

Intéressons nous désormais à la suite de fonctions dérivée $(k'_n)_n$. En effet, f'apparaît dans l'expression finale recherchée, il y a ainsi de grandes chances pour que l'on parle de suites dérivées à un moment... Cela se précise donc :

IV.b).1) Existence et positivité

> $\forall n\in N$, U_n, V_n, W_n, k_n sont continûment dérivables
>
> De plus, $\forall x\in]0,1[$, $\forall n\in N^*$, $U'_n>0$, $V'_n>0$

De même que pour la continuité de U_n et V_n, on fait une récurrence sur n entier pour prouver cela.

Abrégeons donc !
U_1 et V_1 vérifient évidemment la propriété et si l'on suppose la propriété vraie pour un certain n, un petit calcul d'après la définition de U_n et V_n donne

$U'_{n+1} = \dfrac{U'_n + V'_n}{2}$ et $V'_{n+1} = \dfrac{U'_n V_n + U_n V'_n}{2\sqrt{U_n V_n}}$ ce qui assure l'existence, la continuité et la positivité au rang $n+1$... Hop, c'est fini, inutile de s'attarder sur de telles récurrences !

W_n et k_n étant des composées de fonctions continûment dérivables, elles le sont aussi pour tout n...

IV.b).2) Expression de (k'_n)

> $\forall x\in]0,1[$, $\forall n\in N$, $k'_n(x) = \dfrac{V_n^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$

Démonstration :

$2^{n+1} k'_{n+1} = \dfrac{U'_{n+1}}{U_{n+1}} - \dfrac{W'_{n+1}}{W_{n+1}} = \dfrac{U'_n + V'_n}{U_n + V_n} - \dfrac{U'_n - V'_n}{U_n - V_n}$ d'après IV a)1) donc

$$\frac{2^{n+1}k'_{n+1}}{V_{n+1}^2}=\frac{2\left(V'_n U_n-U'_n V_n\right)}{V_{n+1}^2\left(U_n^2-V_n^2\right)}=\frac{2\left(V'_n U_n-U'_n V_n\right)}{\left(U_n V_n\right)W_n^2}=\frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{V'_n V_n}{W_n}-\frac{V_n^2 U'_n}{W_n U_n}\right)$$

or $V_n^2=U_n^2-W_n^2$ et en dérivant, $2V_nV_n'=2U_nU_n'-2W_nW_n'$ donc :

$$\frac{2^{n+1}k'_{n+1}}{V_{n+1}^2}=\frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{U'_n U_n}{W_n}-\frac{W'_n W_n}{W_n}-\frac{U_n^2 U'_n}{W_n U_n}+\frac{W_n^2 U'_n}{W_n U_n}\right)=\frac{2}{W_n V_n^2}\left(\frac{W_n U'_n}{U_n}-W'_n\right)=\frac{2}{V_n^2}\left(\frac{U'_n}{U_n}-\frac{W'_n}{W_n}\right)=\frac{2^{n+1}k'_n}{V_n^2}$$

$$\text{donc}\quad \frac{k'_n(x)}{V_n^2(x)}=\frac{k'_{n-1}(x)}{V_{n-1}^2(x)}=\frac{k'_0(x)}{V_0^2(x)}=\frac{2^{-0}\left(\frac{U'_0(x)}{U_0(x)}-\frac{W'_0(x)}{W_0(x)}\right)}{x^2}=\frac{2x}{2x^2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{x\left(1-x^2\right)}$$

et on obtient finalement :

$$k'_n(x)=\frac{V_n^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$$

IV.b).3) Convergence

(k'_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers : x-> $\dfrac{V^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$

Démonstration

Plaçons-nous sur $[a,b]$ compact de $]0,1[$, $0<a<b<1$
$\forall n\in N$, $\forall x\in[a,b]$, on a :

$$\left|k'_n(x)-\frac{V^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}\right|=\left|\frac{V_n^2(x)-V^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}\right|\le\left|\frac{\left(V_n(x)-V(x)\right)\left(V_n(x)+V(x)\right)}{a\left(1-b^2\right)}\right|\le\left|\frac{2^{-n}(b+1)(1+1)}{a\left(1-b^2\right)}\right|\le\frac{4.\,2^{-n}}{a\left(1-b^2\right)}$$

en utilisant III.a).2)...

Cette majoration uniforme entraîne la convergence uniforme de $(k'_n)_n$ vers

$x\ ->\ \dfrac{V^2(x)}{x\left(1-x^2\right)}$ sur tout compact de $]0,1[$

IV.c) Expression de Pi

Nous y sommes enfin !

IV.c).1) Dérivée

$x \to \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ est la dérivée de $x \to \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

Démonstration

- $\forall n \in N$, k_n est de classe C^1 sur $]0,1[$ d'après IV b)1)
- La suite de fonctions (k_n) converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $x \to \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ d'après IV a)2)
- La suite de fonctions (k'_n) converge uniformément sur tout compact de $]0,1[$ vers $x \to \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$

Donc en application du théorème de dérivation des suites de fonctions (Prépa !),
$x \to \dfrac{f^2(x)}{x(1-x^2)}$ est la dérivée sur $]0,1[$ de $x \to \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$

IV.c).2) Equation différentielle

f vérifie l'équation différentielle :

$\forall x \in]0,1[$,

$$\frac{\pi}{2}\left(f\left(\sqrt{1-x^2}\right) f'(x) + f(x)\, f'\left(\sqrt{1-x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) = \frac{f^2\left(\sqrt{1-x^2}\right) f^2(x)}{x(1-x^2)}$$

Démonstration

Facile ! Il suffit de dériver $x \to \dfrac{\pi}{2}\dfrac{f(x)}{f\left(\sqrt{1-x^2}\right)}$ et d'utiliser le résultat précédent a).

Je ne le fais pas, ce n'est que du calcul !

IV.c).3) Expression de Pi

La quête du Saint-Graal mathématique irait-elle vers son terme ? En tout ca, on touche ici au résultat le plus important de la démo !

$$\boxed{\pi = 2\sqrt{2}\,\frac{f^3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}}$$

Démo

Là, encore, très facile, il suffit de faire $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ dans l'équation différentielle. Pareil, ce n'est que du calcul, je ne vais pas encore alourdir le chargement de cette page avec des expressions inutiles.

C'est tout de même un résultat formidable !
Et qui va être la base de la construction de plusieurs algorithmes très performants à convergence quadratique

---

V Applications

Passons aux choses sérieuses !
Plusieurs exploitations de cette formule sont possibles :

V.a) Utilisation directe des suites dérivées

La première à laquelle on pense tout de suite est d'utiliser les suites de fonctions dérivées (U'_n) et (V'_n) convergeant vers f' (la démonstration de cette convergence est donnée au V.b)). On obtient en remplaçant f et f' par U_n et V_n de différentes façons l'algorithme suivant :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad u_0 = 0 \qquad v_0 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n b_n + a_n v_n}{2\, b_{n+1}}$$

$$2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{a_n^3}{v_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{2}\,\frac{b_n^3}{v_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Même s'il paraît plus compliqué que les algorithmes de Borwein ou Brent/Salamin, je me suis étonné de ne le trouver absolument nulle part ! Mais dans mon souci d'exhaustivité, je ne pouvais manquer de le signaler.

V.b) Algorithme de J. and P. BORWEIN (1987)

Cet algorithme est paru dans *Pi and the AGM* (dont j'aimerais tant avoir un exemplaire même si je ne suis pas sûr de pouvoir tout comprendre !). Je vais en donner la démonstration détaillée et en évaluer la performance...

Il est donné sous la forme :

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2+\sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1}\frac{1+y_n}{1+z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Démonstration

On se placera durant toute la démo sur un compact K de $]0,1[$
Avec les notations des parties précédentes, posons pour $n\geq 1$:

$$y_n = \frac{U_n}{V_n} \qquad z_n = \frac{V_n'}{U_n'}$$

V.b).1) Convergence

Montrons que :

$\boxed{\begin{array}{l} y_n\geq 1,\ z_n\geq 1,\ n\in N^* \\ (y_n) \text{ et } (z_n) \text{ convergent uniformément vers } 1 \text{ sur } K \\ y_{n+1} = \dfrac{1+y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_n = \dfrac{1+y_n z_n}{(1+z_n)\sqrt{y_n}} \end{array}}$

Démonstration

* D'après III.a).2). et la définition de y_n et z_n, $U_n\geq V_n$, donc $y_n\geq 1$

* $\forall n\in N$, $\forall x\in]0,1[$

$$y_{n+1}(x) - 1 = \frac{U_n(x) - V_n(x)}{V_n(x)} < \frac{1}{2^n}\frac{1-x}{x}$$

d'après III.a).2). et $V_n(x)>V_0(x)=x$.

Sur K, on a de plus $x\text{->}1/x\text{-}1$ est bornée (continue sur un compact) par un certain $M\in R^{+*}$, donc

$$\forall x\in K,\ y_n(x)-1<M.2^{-n}$$

De ce fait, (y_n) converge uniformément vers 1 sur K

* Montrons par récurrence sur $n\in N^*$ que $z_n\geq 1$

$n=1 : z_1=x^{-1/2}>1$ sur $]0,1[$

Supposons le résultat pour un certain $n\in N^*$

$$y_{n+1} = \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{U_n + V_n}{2\sqrt{U_n V_n}} = \frac{y_n + 1}{2\sqrt{y_n}}$$

$$z_{n+1} = \frac{V'_{n+1}}{U'_{n+1}} = \frac{U'_n V_n + U_n V'_n}{\sqrt{U_n V_n}\left(U'_n + V'_n\right)} = \frac{1 + \dfrac{U_n V'_n}{V_n U'_n}}{\left(1 + \dfrac{V'_n}{U'_n}\right)\sqrt{\dfrac{U_n}{V_n}}} = \frac{1 + y_n z_n}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}}$$

ce qui montre en passant les relations de récurrence pour (y_n) et (z_n) !

donc

$$z_{n+1} - 1 = \frac{1 + y_n z_n - (1 + z_n)\sqrt{y_n}}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}} = \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)\left(z_n\sqrt{y_n} - 1\right)}{\left(1 + z_n\right)\sqrt{y_n}} \geq 0$$

car $z_n \geq 1$ par hypothèse de récurrence et $y_n \geq 1$ d'après précédemment, en conséquence ceci achève la récurrence...

Pour $n \geq 1$, $z_{n+1} - y_{n+1}$ est du signe de :

$2(1+y_n z_n)-(1+z_n)(1+y_n)=1+y_n z_n - z_n - y_n = (z_n - 1)(y_n - 1) \geq 0$

donc

$$z_{n+1} \geq y_{n+1}$$

De même, $z_{n+1} - y_n^{1/2}$ est du signe de :

$1+y_n z_n - y_n(1+z_n) = 1 - y_n \leq 0$

or $y_n \geq 1$ donc $y_n^{1/2} \leq y_n$ et finalement :

$$y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq y_n^{1/2} \leq y_n$$

donc $0 < y_{n+1} - 1 < z_{n+1} - 1 < y_n - 1$ et :

$$Sup_K(z_{n+1}(x)-1) \leq Sup_K(y_n(x)-1)$$

La convergence uniforme de (y_n) vers 1 sur K assure, par là même, la convergence uniforme de (z_n) vers 1 sur K...

V.b).2) Montrons maintenant que (U'_n) et (V'_n) convergent uniformément sur K. C'est certainement la démonstration la plus pénible à obtenir, mais elle marche et c'est bien le principal !!

Soit donc $x \in]0,1[$, $n \in N^*$,
$z_n \geq 1$, donc $U'_n \leq V'_n$ et comme $U'_{n+1} = (U'_n + V'_n)/2$ on a $U'_{n+1} \geq U'_n$

(U'_n) est donc croissante

$V'_{n+1}(x)-V'_n(x)=\dfrac{U_n'(x)V_n(x)+U_n(x)V_n'(x)}{2\sqrt{U_n(x)V_n(x)}}-V_n'(x)$ donc le signe de $V'_{n+1}(x)-V'_n(x)$ est celui de :
$U_n'(x)V_n(x)+U_n(x)V_n'(x)-2V_n'(x)\sqrt{U_n(x)V_n(x)}$.

En divisant par $U'_n(x)V'_n(x)>0$ on obtient :

$$1+z_n(x)y_n(x)-2z_n(x)\sqrt{y_n(x)}=z_n(x)\left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2-z_n(x)+1$$

$$\textit{donc}\quad V_{n+1}'(x)-V_n'(x)\leq 0\quad \textit{si}\quad \left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2\leq\frac{z_n(x)-1}{z_n(x)}$$

or, d'après a), $y_n^{1/2}-1\leq y_n-1\leq z_n-1$, et (z_n) converge uniformément vers 1 sur K donc à partir d'un certain rang n_0, pour $n\geq n_0$,

$\forall x\in K$, $0<z_n(x)-1<1/2$, d'où :

$$\left(\sqrt{y_n(x)}-1\right)^2\leq\left(z_n(x)-1\right)^2\leq\frac{z_n(x)-1}{2}\leq\frac{z_n(x)-1}{z_n(x)}\quad \text{car } z_n(x)\leq 2$$

ainsi pour $n\geq n_0$ et $x\in K$, $V'_{n+1}(x)\leq V'_n(x)$ et finalement :

$$U'_n(x)\leq U'_{n+1}(x)\leq V'_{n+1}(x)\leq V'_n(x)$$

Ceci étant, soit $ß>0$
(z_n) converge uniformément vers 1 sur K, donc il existe $n_1\in N$ tel que :

$$n\geq n_1 \Rightarrow 0\leq \sup_K(z_n(x)-1)<ß*V_{no}(x)^{-1}$$

or
$$z_n(x)-1=\frac{V_n'(x)-U_n'(x)}{U_n'(x)}\quad \textit{donc}$$

$$0\leq V_n'(x)-U_n'(x)<\frac{ßU_n'(x)}{V_{n_0}(x)}<\frac{ßV_n'(x)}{V_{n_0}(x)}$$

avec $n\geq Max(n_0,n_1)$ et puisque (V'_n) est décroissante d'après ci-dessus (eh oui !), on a pour $n\geq Max(n_0,n_1)$ $V'_n(x)\leq V'_{no}(x)$, donc :

$$0\leq V'_n(x)-U'_n(x)<ßV'_{no}(x)V'_{no}(x)^{-1}=ß$$

$\forall x\in]0,1[$, $(U'_n(x)$ et $(V'_n(x))$ sont de ce fait des suites adjacentes et convergent vers une limite commune que l'on notera $\mu(x)$.

On a donc :

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq U'_n(x) \leq U'_{n+1}(x) \leq \mu(x) \leq V'_{n+1}(x) \leq V'_n(x)$$

Pour $n \geq Max(n_0, n_1)$ on a donc :

$$\forall x \in]0,1[,\ 0 \leq \mu(x) - U'_n(x) \leq V'_n(x) - \mu(x) \leq ß$$

Donc les suites (U'_n) et (V'_n) convergent uniformément sur K vers $\mu(x)$

V.b).3) Construisons maintenant la suite (f_n) (enfin !)

(U_n) converge uniformément (donc a fortiori simplement) sur K vers f et (U'_n) converge uniformément sur K donc sa limite est f' sur $]0,1[$

Posons $f_n = 2\sqrt{2}\,\dfrac{V_{n+1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\sqrt{2}\,\dfrac{f^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{f'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pi$

On a :

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{V_{n+1}^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) V_n^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{U_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\left(U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(U'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + V'_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1 + y_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 + z_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

puis

$$f_0 = 2\sqrt{2}\,\frac{V_1^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) 2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$y_0 = \frac{U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{V_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \quad et \quad z_1 = \frac{V'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{U'_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}}\,\frac{1}{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}$$

ce qui achève la démonstration. Ah ! quel beau résultat !

Performance

Toute la longueur des démonstrations du *XXe* siècle trouve sa récompense au chapître des performances (encore heureux !)
Cet algorithme est en effet à convergence quadratique. C'est-à-dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération, mais cela ne se voit pas au premier abord !

Montrons donc que :

$$\boxed{0 \le f_{n+1} - \pi \le 4 f_0 (500)^{-2^n}}$$

Démonstration

Soit $n \in N$.

$$0 \le y_{n+1} - 1 = \frac{1 + y_n - 2\sqrt{y_n}}{2\sqrt{y_n}} = \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)^2}{2\sqrt{y_n}} \le \frac{\left(\sqrt{y_n} - 1\right)^2}{2} \frac{\left(\sqrt{y_n} + 1\right)^2}{\left(\sqrt{y_n} + 1\right)^2} \quad car \quad \sqrt{y_n} \ge 1$$

$$\le \frac{\left(y_n - 1\right)^2}{8} \le \frac{\left(y_{n-1} - 1\right)^4}{8.8^2} \le \ldots \le \frac{\left(y_1 - 1\right)^{2^n}}{8.8^{2^n}} \quad car \quad \sqrt{y_n} + 1 \ge 2$$

Pour $x=2^{-1/2}$, un petit calcul numérique donne :

$$\frac{y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 1}{8} = \frac{\sqrt{2} + 1}{8\sqrt{2}} \sqrt[4]{2} - \frac{1}{8} < 0,02 = \frac{1}{500} \quad donc$$

$$0 \le y_{n+1} - 1 \le \frac{1}{8} (500)^{-2^n}$$

D'autre part,

$$0 \le f_n - f_{n+1} = f_n \frac{1 + z_{n+1} - 1 - y_{n+1}}{1 + z_{n+1}} \le f_n \frac{y_n - y_{n+1}}{2} \le \frac{f_0}{2} \left(y_n - y_{n+1}\right)$$

$$car \quad z_{n+1} \le y_n \le z_n \quad et \quad donc \quad aussi \quad f_n = f_{n-1} \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \le f_{n-1} \le f_0$$

Or, on a $0 \le f_{n+1} - f_{n+k} = \sum_{j=1}^{k-1} \left(f_{n+j} - f_{n+j+1} \right)$, les termes se compensant deux à deux. On fait alors tendre k vers $+\infty$, et on obtient :

$$0 \le f_{n+1} - \pi = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(f_{n+j} - f_{n+j+1} \right) \le \frac{f_0}{2} \sum_{j=1}^{+\infty} \left(y_{n+j} - y_{n+j+1} \right) \le \frac{f_0}{2} \left(y_{n+1} - 1 \right) \le 4 f_0 (500)^{-2^n}$$

V.c) Algorithme de Brent/Salamin (1976)

L'algorithme originel est celui-ci, on ne pouvait donc passer outre sa démonstration, que je n'ai d'ailleurs étonnamment trouvée nulle part, mais il n'est pas trop dur de la refaire, grâce à tout le boulot réalisé précédemment !

Cet algorithme est donné sous la forme :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi$$

Démonstration

Elle est très rapide ! Reprenons exactement les mêmes notations que pour la démo précédente...

V.c).1) Rappelons nous : $k_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{U_n}{V_n}\right)$

$k_n' = 2^{-n}\left(\frac{U_n'}{U_n} - \frac{W_n'}{W_n}\right)$ or $W_n = \sqrt{U_n^2 - V_n^2}$ donc

$$W_n' = \frac{2\,U_n'\,U_n - 2\,V_n'\,V_n}{2\sqrt{U_n^2 - V_n^2}} = \frac{U_n'\,U_n - V_n'\,V_n}{W_n} \quad donc$$

$$k_n' = 2^{-n}\left(\frac{U_n'}{U_n} - \frac{U_n'\,U_n - V_n'\,V_n}{W_n^2}\right) = 2^{-n}\left(\frac{-U_n'\,V_n^2 - V_n'\,V_n U_n}{U_n W_n^2}\right) = -\frac{2^{-n}\,V_n}{U_n W_n^2}\left(U_n'\,V_n - V_n'\,U_n\right) = -\frac{2^{-n}\,V_n^3}{U_n W_n^2}\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'$$

or d'après IV.b).2), sur *]0,1[* $k_n'(x) = \frac{V_n^2(x)}{x\left(1 - x^2\right)}$ en conséquence

$$\left(\frac{U_n}{V_n}\right)'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}\,2^n\,U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \text{ en } x = 2^{-1/2}$$

V.c).2) Posons d'autre part

$$\forall n \in N, \quad T_n = \frac{V_n'}{V_n} \quad \text{on a} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{2}\,U_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{T_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \pi$$

calculons (encore !) :

$$T_{n+1} - T_n = \frac{U_n'\,V_n + U_n V_n' - 2\,V_n'\,U_n}{2\,U_n V_n} = \frac{U_n V_n' - V_n'\,U_n}{2\,U_n V_n} = \left(\frac{U_n}{V_n}\right)' \frac{V_n^2}{2\,U_n V_n} \text{ (tiens !)}$$

$$T_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - T_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-2\sqrt{2}\,2^n\,U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2\,V_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) U_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = -\sqrt{2}\,2^n\,W_n^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Par récurrence immédiate, on a donc :

$$I_{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = I_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^{2}$$ en simplifiant les notations.

Donc, on obtient finalement:

$$\forall n \in N, \quad f_n = \frac{2\sqrt{2}\,U_n^{2}}{I_n} = \frac{2\sqrt{2}\,U_n^{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\, W_m^{2}} = \frac{4\,U_n^{2}}{1 - 2\sum_{m=1}^{n} 2^{m}\left(U_n^{2} - V_n^{2}\right)} \quad \textit{avec}$$

$$U_0 = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \quad V_0 = U_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \quad V_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$$

ce qui achève toute la partie démo et me donne droit à un repos bien mérité (Ouf ! cette page était bien longue...)

Essais

Les suites présentées ont des performances similaires. Par exemple, concernant la seconde (Borwein), pour obtenir *10 000 000* de décimales de *Pi*, il suffit d'avoir n≥19 !!!

Les essais sont assez extraordinaires :

n=	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
d=	*2*	*8*	*18*	*40*	*83*	*170*	*344*	*693*	*1392*	*2789*

d est le nombre de décimales exactes de *Pi*
La convergence quadratique est parfaitement respectée, c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

De plus, le temps de calcul de *n* décimales, qui nécessite pour les méthodes classiques un temps proportionnel à n^2, se trouve réduit à environ *n.Log(n)* avec les algorithmes de Brent/Salamin et Borwein... Une petite révolution !

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr