Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Attention !  Génie !!!

Srinivasa Ramanujan
(1887 - 1920)

Quelques formules (mais il y en a tellement...)

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4} (n!)^6} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1} (n!)^4 (441)^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

En notant $(x)_n$ la valeur : $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ (c'est le symbole de Pochhammer), on a :

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3} \right)^{-1} \qquad \pi = 32\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n + 5\sqrt{5} + 30n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{8n} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,3^n\,4^{n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,2^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,5^n\,72^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,18^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,9^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,9^n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,49^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\,99^{2n+1}}\right)^{-1}$$

ouf !

Tranches de vie

Avec Ramanujan, on touche à la quintessence de l'étude de *Pi*. C'est le maître d'oeuvre de toute la recherche du *XXe* siècle dans ce domaine, n'ayons pas peur de le dire !
Je m'étendrai donc longuement sur ce génie méconnu qui laissa pourtant une oeuvre magistrale encore incomprise de nos jours dans certains domaines. Sa vie est de plus un véritable roman...

Mais commençons par le début :

Srinivasa Ramanujan est né le *22 décembre 1887* dans la ville d'Erode au sud de l'Inde dans une famille pauvre. Son père est comptable. Sa précocité mathématique est vite reconnue et à sept ans, il obtient une bourse au lycée de Kumbakonam (!). On dit qu'il récitait des formules

mathématiques à ses camarades d'école et qu'il savait notamment un grand nombre de décimales de *Pi* !
Dès le début de son étude de la trigonométrie, il découvrit les cosinus et sinus, trouva les relations qui les unissent et se montra fort déçu en apprenant qu'elles étaient déja connues!!!
A *12* ans, Ramanujan maîtrisait ainsi un ouvrage dense : *la Trigonométrie plane* de Loney. A *15*, il se procura *Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics* de G.S.Carr, une liste de *6165* théorèmes énoncés souvent sans démonstration. On suppose que c'est de ce livre qu'il tira ses inspirations et sa fâcheuse habitude de ne pas livrer de démo avec ses résultats !
Il était d'ailleurs à cette époque tant omnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens !
Heureusement, après son mariage en *1909*, il reçut une somme mensuelle d'un riche mécène passionné de mathématiques (R. Rao) sur les recommandations des mathématiciens indiens qui appréciaient les découvertes déja transcrites dans ce que l'on appelle communément ses carnets.
Ayant obtenu un emploi stable en *1912* comme fonctionnaire au comptoir de Madras, il fut encouragé par ses dirigeants à envoyer ses résultats à *3* éminents mathématiciens britanniques, parmi lesquels seul G. Hardy répondit à sa lettre du *16/01/1913*.
En effet, lorsque Hardy et son collègue Littlewood s'attaquèrent aux quelques *120* formules et théorèmes envoyés par Ramanujan, leur conviction fut faite quelques heures plus tard : ils avaient affaire à un génie ! (Hardy avait construit une "échelle des capacités pures" sur laquelle il se situait lui même à *25*, attribuait *30* à Littlewood, et *80* à Hilbert, figure rayonnante des mathématiques allemandes du début du siècle. Ramanujan fut immédiatement estimé à *100* !!!).
Hardy décrivit d'ailleurs la découverte intellectuelle de Ramanujan et ses conséquences comme le seul événement "romantique" de sa vie...
Lorsqu'il se pencha sur les formules de Ramanujan, il en fut déconcerté et ne sut pas comment les démontrer. Pourtant, affirmait-il, "elles devaient être vraies car si elles ne l'étaient pas, personne au monde n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer !"
Il fit venir Ramanujan en Angleterre et travailla avec lui très fructueusement les cinq années suivantes sur les propriétés de plusieurs fonctions arithmétiques. Srinivasa devint même le premier Indien membre de la Royal Society en *1918* et du Trinity College.
Malheureusement, et c'est bien regrettable, Ramanujan était strictement végétarien (à cause d'une promesse faite à sa mère !), et dans une Angleterre en pleine guerre, ses besoins étaient difficiles à satisfaire... Après la guerre, en *1919*, il revint en Inde gravement malade d'une tuberculose et d'une carence en vitamines (c'est humide le royaume Britannique !).
Son travail resta de grande qualité malgré ses souffrances, mais il s'éteignit finalement le *26 avril 1920* à *32* ans.

Une petite anecdote assez connue de Hardy :

"Je me souviens être allé le voir lorsqu'il était malade et alité à Putney. J'étais monté dans un taxi dont la plaque avait pour numéro *1729* et remarqua que ce nombre me semblait bien triste. J'espérai que cela n'annonça pas un mauvais présage...
"Non", répliqua Ramanujan, "c'est un nombre très intéressant, c'est le plus petit des entiers exprimables comme somme de deux cubes, de deux façons différentes" !!
Je lui demandai si il savait quel était le suivant. Il réfléchit et me dit qu'il n'en voyait pas d'autre proche... En fait, le suivant est plusieurs dizaines de milliers plus tard !!

Autour de π

Ramanujan était un passionné de *Pi*. Beaucoup de ses résultats tournent autour de notre constante préférée...
Ramanujan a consigné ses travaux dans des carnets comme je l'ai dit plus haut.

Malheureusement, la plupart des formules sont écrites dans des notations non standard et sans démonstrations. Depuis *80* ans, plusieurs mathématiciens (Bruce Berndt actuellement) tentent de déchiffrer ces livres codés pour le plus grand bonheur de la Science !
Car Ramanujan travaillait sur les équations modulaires. Mais qu'est-donc au juste ?
Je vais reprendre l'exemple très clair du livre *Les mathématiciens* pour éclairer la définition.

Une équation modulaire est une équation que vérifie une fonction modulaire $\lambda(q)$ où la variable q intervient à des puissances diverses, par exemple $\lambda(q^n)$. n désigne alors l'ordre de l'équation modulaire.
Considérons par exemple l'équation modulaire du *7e* ordre (*n=7*) :

$$\sqrt[8]{\lambda(q)\lambda(q^7)} + \sqrt[8]{[1-\lambda(q)][1-\lambda(q^7)]} = 1$$

On cherche ensuite la solution de cette équation. Dans notre cas, on a :

$$\lambda(q) = 16q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^8$$

(ne me demandez pas comment elle a été trouvée...)
Jusque là, aucun rapport avec *Pi*...
Eh bien, on appelle valeurs singulières des valeurs de la fonction modulaire $\lambda(q)$ qui vérifient des propriétés supplémentaires. Par exemple, si l'on définit pour *p* entier :

$$K_p = \sqrt{\lambda\left(e^{-\pi\sqrt{p}}\right)}$$

On voit tout de suite que plus p est grand, plus l'exponentielle devient petite et le produit dans $\lambda(q)$ tend vers *16q*
Donc, si l'on prend $\frac{-2}{\sqrt{p}}\ln\left(\frac{K_p}{4}\right)$, on obtient un nombre qui coïncide sur les premières décimales avec *Pi* !
Bien sûr, le nombre de décimales augmente avec *p*. On voit alors tout l'avantage d'avoir une relation entre $\lambda(q)$ et $\lambda(q^p)$, ce dernier nombre étant donc plus proche de *Pi* que le premier (car l'exponentielle est encore plus petite !)
La chose exceptionnelle dans cette théorie, c'est que ces valeurs singulières ne dépendent absolument pas de *Pi* malgré leur définition.
Ramanujan était un grand spécialiste de ces valeurs et les calculait de façon remarquable. Dans sa lettre à Hardy, il donnait d'ailleurs :

$$K_{210} = \left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)^2\left(8-3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{10}-3\right)^2\left(\sqrt{15}-\sqrt{14}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)^2\left(6-\sqrt{35}\right)$$

ce qui permet d'obtenir *20* décimales de *Pi*.
K_{240} permet lui d'obtenir le premier million de décimales de *Pi* !!

Mais il n'a pas entrepris de recherches sur les algorithmes que l'on pouvait en tirer. Les frères Borwein s'en sont chargés, voici donc comment ils ont procédé :

Principe de la démonstration des Borwein

Si l'on regarde la démonstration des Borwein pour l'algorithme du second ordre, on voit clairement que l'on considère l'équation modulaire du second degré :

$$a^2+b^2=c^2$$

avec $a(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$, $b(q)=\theta_4^4(q)$, $c(q)=2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$ et les Thêta Fonctions :

$$\theta_2(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \quad \theta_3(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \quad \theta_4(q)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad q=\exp\left(-\pi\sqrt{r}\right)$$

Cette équation conduit à poser $s(q)=\dfrac{c(q)}{a(q)}$ et $s^\times(q)=\dfrac{b(q)}{a(q)}$ et à trouver la véritable équation modulaire du second degré utile ici :

$$4=(1+3s(q^2))(1+3s^\times(q)) \quad \text{et} \quad 1=s^2+(s^\times)^2$$

$$\text{donc} \quad s(q^2)=\frac{1-\sqrt{1-s(q)}}{1+3\sqrt{1-s(q)}}$$

dont la solution est bien connue d'après la définition de $s(q)$ (on est en fait parti ici de la solution pour arriver à l'équation modulaire).
La valeur initiale s_1 correspond à une première valeur singulière, la suite s_n permet alors de calculer une suite de valeurs singulières.
La suite consiste maintenant comme plus haut à trouver le moyen de se ramener à ../borwein/borwein.html#demo, comme le logarithme le permet dans le premier exemple. Le rôle est joué ici par les $\alpha_p(p^2r)$, et puis on en tire un algorithme. La justification en est donnée par l'apparition de la fonction α dans l'équation de Legendre.
En somme, une bien belle théorie...

A propos des formules de Ramanujan :

Cette page un peu spéciale ne comprend pas de démonstrations. Je n'ai pas refaire les intermédiaires de calculs sur les pages canadiennes des Borwein. A part la formule générale de formation des séries de type Ramanujan trouvées par les Borwein et écrite sur ma page qui leur est consacrée, je préfère vous laisser regarder sur leur site....

D'autres résultats de Ramanujan :

Alors, quoi d'autre ?
Il y a tout d'abord les nombreuses approximations de *Pi* qu'il a trouvées de façon prodigieuse !
Elles sont relatées dans la page approximations de Pi.
Sinon, il n'existe malheureusement pas trop d'informations sur les résultats de Ramanujan.
Néanmoins, voilà ce que j'ai pu trouver :

Nombres premiers (fonction *Tau* de Ramanujan) :

Soit τ tel que $g(x) = x\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-x^i\right)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$

alors $\tau(n.n') = \tau(n)\tau(n')$ pour PGCD $(n, n') = 1$ $(n_\wedge n' = 1)$

Cette première propriété permet de calculer la fonction *Tau* pour tous les produits de nombres premiers sachant la valeur *Tau(p)*.

Et puisque que les entiers naturels sont décomposables comme produits de facteurs premiers, la fonction *Tau* sera entièrement évaluée sur *N* si on peut l'évaluer pour les puissances de nombres premiers, ce que réalise le théorème suivant par récurrence :

$$\tau\left(p^{n+1}\right) = \tau(p)\tau\left(p^n\right) - p^{11}\tau\left(p^{n-1}\right)$$

Cette fonction *Tau* possède de plus bon nombre de propriétés supplémentaires :

Il existe des relations de congruence pour 7, 23 et 691

par exemple : $\tau(23n + k) \equiv 0[23]$

De plus, Ramanujan conjecturait : $|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}$ pour p premier

Notons que la relation de congruence n'est vraie que si *k* est non-résidu quadratique modulo *23*, c'est à dire s'il n'existe pas d'entier *x* tel que $x^2=k[23]$. Comme il y a *(p-1)/2* résidus quadratiques pour *p>2*, on en déduit d'ailleurs qu'en moyenne, un entier naturel *N* sur deux est tel que *tau(N)* est divisible par *23*.

Pierre Deligne (belge et non français) a montré en *1971* que la conjecture plus haut était une conséquence des conjectures de Weil. Et comme il ne voulait visiblement pas en rester là, il les démontra en *1973*, ce qui lui valut en partie l'une des médailles Fields de *1978*.

Et on a aussi :

$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n)[691]$ où $\sigma_{11}(n)$ est la somme des puissances onzièmes des diviseurs de n.

Constante de Landau-Ramanujan :

$a_k = \int_1^2 \frac{(\ln(x))^k}{x-1}dx$ on a : (1909)

$a_1 = \frac{1}{2}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{12}$ et $a_2 = \frac{1}{4}\zeta(3)$

La démonstration de a_1 est assez évidente en faisant le changement de variable $t=x-1$, puis en écrivant le dévelopement limité de *Ln(1-t)*, et en justifiant l'interversion entre somme et intégrale. Je n'ai pas cherché pour a_2, mais ça a l'air tout à fait faisable !

Répartition des nombres premiers :

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \int_c^x \frac{dt}{\log(t)}$$ où c est la racine de Li définie par

$$\mathrm{Li}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dt}{\log(t)} + \int_{1+\epsilon}^{x} \frac{dt}{\log(t)} \quad (c \approx 1,41513692346)$$

et $\mu(m)$ est la fonction de Möbius définie par

$$\mu(m) = \left| \begin{array}{c} 1 \text{ si } k = 1 \\ (-1)^r \text{ si k est le produit de r nombres premiers distincts} \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Equations de théorie des nombres :

Ramanujan se posait le problème de trouver les solutions de l'équation :

$$2^N - 7 = X^2$$

Les ordinateurs ont permis de chercher jusqu'à $N=10^{40}$ mais seules ses solutions $(N=3,4,5,7,15)$ furent confirmées. On a en fait prouvé récemment que c'étaient les seules valides !

Un autre problème de Ramanujan ? Mais bien sûr :

Trouver par exemple toutes les solutions de $n!+1=x^2$

(je n'en ai malheureusement pas la liste...)

Merci à Christian Radoux pour ses précisions sur la fonction *Tau*

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr