Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Suites convergeant vers π
Construites par des méthodes géométriques
(Par ordre chronologique des auteurs ou inspirateurs)

Archimède : (287 AVJC - 212 AVJC)

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + V_n^2}}{V_n}$$

$$6.2^n\, U_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad 6.2^n\, V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Fibonacci : (1180 - 1250)

Application géométrique de la suite de Fibonacci :

U_0 et U_1 quelconques strictement positifs (si égaux à 1 on retrouve la suite de Fibonacci !

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$$

$$\forall n \in N \qquad \pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)}\left(\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}}\right)^{2k+1}\right)$$

Avec $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *le nombre d'or,*

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left(\phi^{-2k-1} + \phi^{-6k-3}\right) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\left((\phi-1)^{2k+1} + (2\phi-3)^{2k+1}\right)$$

Al Kashi : (? - 1429)

$$C_0 = 1 \qquad C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}}$$

$$3.2^n . C_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

De Cues : (1401 - 1464)

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

$$\frac{1}{2 a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad \frac{1}{2 b_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Viete : (1540 - 1603)

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad U_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

$$U_0 = 0 \qquad V_0 = 2$$

$$U_n = \sqrt{2 + U_{n-1}} \qquad V_n = \frac{2 V_{n-1}}{U_n}$$

$$V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Descartes : (1596 - 1650)

$$\forall L \in R^{*} \qquad r_0 = \frac{L}{8} \qquad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$S_n = \frac{L}{2 r_n} \qquad S_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Wallis : (1616 - 1703)

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} \qquad \frac{2^{4n+2}\, n (n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$\frac{2^{4n+2} \left(n + \frac{3}{4}\right) (n!)^4}{((2n+1)!)^2} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

(la troisième est simplement une version améliorée de la seconde)

Autres suites : (voir le Grenier)

1) $x_1 = 2 \quad x_2 = 2\sqrt{2} \quad x_{k+1} = x_k \sqrt{\frac{2x_k}{x_k + x_{k-1}}}$

$x_k \xrightarrow{k \to \infty} \pi$

2) Petite suite perso

$$\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(\sqrt{4n^2-k^2}-\sqrt{4n^2-(k-1)^2}\right)^2} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

3) Application de la loi des grands nombres

Soit $(M_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une suite aléatoire de n points du carré $[0,1]\times[0,1]$ et D_n le cardinal de l' ensemble de ces points appartenant au cercle de centre 0 et de rayon 1, c' est à dire :

$$D_n = card\left\{(a,b) \in (M_i)_{i \in [\![1,n]\!]} / \sqrt{a^2+b^2} \le 1\right\}$$

alors $g_n = \frac{4D_n}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr