Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Suites convergeant vers π
Construites par des méthodes analytiques
(Par ordre chronologique des auteurs ou inspirateurs)

Lord Brounker (1620 - 1684)

$$\pi = 4\,\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}}$$

Autres fractions continues

$$\pi = 2+\cfrac{2}{1+\cfrac{1}{\cfrac{1}{2}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{3}+\cfrac{1}{\cfrac{1}{4}+\ldots}}}}$$

$$\pi = 2+\cfrac{4}{3+\cfrac{1\times 3}{4+\cfrac{3\times 5}{4+\cfrac{5\times 7}{4+\ldots}}}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 1-\cfrac{1}{3-\cfrac{2\times 3}{1-\cfrac{1\times 2}{3-\cfrac{4\times 5}{1-\cfrac{3\times 4}{3-\cfrac{6\times 7}{1-\ldots}}}}}}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1+\cfrac{1^2}{3+\cfrac{2^2}{5+\cfrac{3^2}{7+\cfrac{4^2}{9+\ldots}}}}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1^2}{6+\cfrac{3^2}{6+\cfrac{5^2}{6+\cfrac{7^2}{6+\ldots}}}}$$

$$\frac{6}{\pi^2-6} = 1+\cfrac{1^2}{1+\cfrac{1\times 2}{1+\cfrac{2^2}{1+\cfrac{2\times 3}{1+\cfrac{3^2}{1+\cfrac{3\times 4}{1+\ldots}}}}}}$$

$$\frac{12}{\pi^2} = 1+\cfrac{1^4}{3+\cfrac{2^4}{5+\cfrac{3^4}{7+\cfrac{4^4}{9+\ldots}}}}$$

$$\frac{16}{\pi} = 5+\cfrac{1^2}{10+\cfrac{3^2}{10+\cfrac{5^2}{10+\cfrac{7^2}{10+\ldots}}}}$$

Newton : (1642 - 1727)

$$\pi = 6\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+1}(n!)^2(2n+1)} \qquad \pi = 24\left(\frac{\sqrt{3}}{32}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{4n+2}(n!)^2(2n-1)(2n+3)}\right)$$

suite similaire :

$$\pi = 4-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-2)!\,k}{2^{2k-3}(k!)^2(2k+1)}$$

Leibniz (1646 - 1716)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

$$\pi = 8\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}+\ldots\right) = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$$

Katahiro (1664 - 1739)

$$\forall r > 1 \qquad U_0 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{2r}\right) \qquad U_n = \frac{U_0\,U_{n-1}(2n)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{U_0^{\,n+1}\,2(n!)^2}{(2n+2)!}$$

$$\pi = r\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}U_n}$$

Machin (1680 - 1751)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1}-\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

Moivre/Stirling (1667 - 1754) / (1692 - 1770)

$$\frac{(n!)^2e^{2n}}{2n^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad \forall r \in N^* \quad \frac{(n!)^2e^{2n}}{2n^{2n+1}e^{2\sum_{k=1}^{r}\frac{|Ber_{2k}|}{2k(2k-1)n^{2k-1}}}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Euler (1707 - 1783)

1) $\pi = \sqrt{6\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}$ $\qquad \pi = \sqrt{3}\sqrt[4]{10}\sqrt[4]{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}}$ plus généralement, on a

$\forall i \in N^* \ \pi = \frac{1}{2}\sqrt[2i]{\frac{2(2i)!}{|Ber_{2i}|}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2i}}}$ où Ber_{2i} est le nombre de Bernoulli d'indice $2i$

2)

$$\pi = 4 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{1-16n^2} \quad \text{et plus généralement} \quad \forall z \in R^* \setminus N \quad \pi = \frac{\frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2}}{\cot an(\pi z)}$$

3)

$$\pi = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \quad \text{et aussi} \quad \forall i \in N^* \quad \pi = \frac{1}{2}\sqrt[2i]{\frac{2(2i)!}{|Ber_{2i}| \prod_{p \ premier} (1 - \frac{1}{p^{2i}})}}$$

Buffon (1707 - 1788)

Si on lance une aiguille de longueur *2b* sur un parquet formé de lames de largeur *2a*, la probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet est $\frac{2a}{\pi b}$

Gauss (1777 - 1855)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(12\left(\frac{1}{18}\right)^{2n+1} + 8\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1} - 5\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} \right)$$

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \left(12\left(\frac{1}{38}\right)^{2n+1} + 20\left(\frac{1}{57}\right)^{2n+1} + 7\left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1} + 24\left(\frac{1}{268}\right)^{2n+1} \right)$$

Cesaro (1859 - 1906)

La probabilité que deux entiers pris au hasard soient premier entre eux (pas de diviseur commun) est $\frac{6}{\pi^2}$

Ramanujan (1887 - 1920)

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((2n)!)^3 (42n+5)}{2^{12n+4} (n!)^6} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!(1123 + 21460n)}{2^{10n+1} (n!)^4 (441)^{2n+1}} \right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

En notant $(x)_n$ la valeur : $\prod_{i=0}^{n-1} (x+i) = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = x(x+1)\ldots(x+n-1)$

On peut écrire :

$$\pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{4^n (n!)^3}\right)^{-1} \qquad \pi = 32\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(42\sqrt{5}n + 5\sqrt{5} + 30n - 1)\left(\frac{1}{2}\right)_n^3}{64^n (n!)^3}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{8n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{27}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(15n+2)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{2}{27}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{15\sqrt{3}}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(33n+4)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{3}\right)_n\left(\frac{2}{3}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(11n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{125}\right)^n\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{85\sqrt{85}}{18\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(133n+8)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{6}\right)_n\left(\frac{5}{6}\right)_n}{(n!)^3}\left(\frac{4}{85}\right)^n\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(28n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 3^n 4^{n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(20n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 2^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(644n+41)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 5^n 72^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(260n+23)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 18^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(10n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 9^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = 2\sqrt{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(8n+1)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 9^n}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{1}{3\sqrt{3}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(40n+3)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 49^{2n+1}}\right)^{-1} \qquad \pi = \frac{2}{\sqrt{11}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(280n+19)\left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{4}\right)_n\left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3\, 99^{2n+1}}\right)^{-1}$$

[Gosper]

$$\pi = 3 + \frac{1}{60}\left(8 + \frac{2.3}{7.8.3}\left(13 + \frac{3.5}{10.11.3}\left(18 + \frac{4.7}{13.14.3}(\ldots)\right)\right)\right)$$

$$= 3 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(5n+3)(2n-1)!(n!)}{2^{n-1}(3n+2)!}$$

On a la formule générale pour *x* inférieur à *1* :

$\frac{\sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}(n!)^2}{2(2n+1)!} = {}_2F_1\left(1,\ 1;\ \frac{3}{2};\ x^2\right)x$ où ${}_2F_1$ est une série hypergéométrique.

Pour *x=1/2*, on obtient :

$\pi = \frac{9}{2\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ qui connait une convergence en *2n*

Pour $x = \sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ on peut écrire :

$\pi = \frac{5\sqrt{2+\phi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{\phi^{2n+1}(2n+1)!}$ de convergence *3,39n*

Quelques formules bizarres où intervient *Pi* !

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=n}^{2n} \frac{\pi}{2\,Arc\tan(i)} = 4^{\frac{1}{\pi}} \approx 1,554682275$$

$$\pi^2 = -12e^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos\left(\frac{9}{n\pi + \sqrt{n^2\pi^2 - 9}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 7n + 11)\left((-1)^n \cot\left(\frac{5\pi}{8n+28}\right) + 1\right)} = \frac{\pi\cot(\phi\pi)(\csc(\phi\pi) - 1)}{2\sqrt{5}} - \frac{3}{5\pi} - \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{10}$$

et en généralisant : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{\pi a^2(-1)^n}{2n+1} + \frac{\pi}{4}\right)}{\left(n - a + \frac{1}{2}\right)\left(n + a + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\pi\sin(a\pi)}{2a\cos^2(a\pi)}$

Sommes de Reynolds :

$$\forall k \in N^* \quad S_k = 4\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\right)^k$$

$$S_1 = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2^2 0!} \quad S_2 = \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2^3 1!} \quad S_3 = \frac{\pi^3}{32} = \frac{\pi^2}{2^4 2!} \quad S_4 = \frac{\pi^4}{96} = \frac{2\pi^4}{2^5 3!} \quad S_5 = \frac{5\pi^5}{256} = \frac{5\pi^5}{2^6 4!}$$

$$S_6=\frac{16\pi^6}{2^7 5!}\quad S_7=\frac{61\pi^7}{2^8 6!}\quad S_8=\frac{272\pi^8}{2^9 6!}\quad S_9=\frac{1385\pi^9}{2^{10} 7!}\quad S_{10}=\frac{7936\pi^{10}}{2^{11} 8!}$$

G et D.Chudnovsky

$$\pi=\frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3(640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$$

Borwein

$$\pi=\frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(212175710912\sqrt{61}+1657145277365+(13773980892672\sqrt{61}+107578229802750)n)}{(3n)!(n!)^3(5280(236674+30303\sqrt{61}))^{3n+\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$$

avec **A**=63365028312971999585426220+28337702140800842046825600*$5^{1/2}$ + 384*$5^{1/2}$(10891728551171178200467436212395209160385656017 + 4870929086578810225077338534541688721351255040*$5^{1/2}$)$^{1/2}$
B=7849910453496627210289749000+3510586678260932028965606400 + 2515968*$3110^{1/2}$(6260208323789001636993322654444020882161 + 2799650273060444296577206890718825190235*$5^{1/2}$)$^{1/2}$
C=-214772995063512240-96049403338648032*$5^{1/2}$-1296*$5^{1/2}$(10985234579463550323713318473 + 4912746253692362754607395912*$5^{1/2}$)$^{1/2}$

Plouffe

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)$$

$$\forall r\in C\quad \pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4+8r}{8i+1}-\frac{8r}{8i+2}-\frac{4r}{8i+3}-\frac{2+8r}{8i+4}-\frac{1+2r}{8i+5}-\frac{1+2r}{8i+6}+\frac{r}{8i+7}\right)$$

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{4^i}\left(\frac{2}{4i+1}+\frac{2}{4i+2}+\frac{1}{4i+3}\right)$$

$$\pi\sqrt{2} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{8^i}\left(\frac{4}{6i+1}+\frac{1}{6i+2}+\frac{1}{6i+3}\right)$$

$$\pi^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{16}{(8i+1)^2}-\frac{16}{(8i+2)^2}-\frac{8}{(8i+3)^2}-\frac{16}{(8i+4)^2}-\frac{4}{(8i+5)^2}-\frac{4}{(8i+6)^2}-\frac{2}{(8i+7)^2}\right)$$

$$\pi^2 = \frac{9}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{64^i}\left(\frac{16}{(6i+1)^2}-\frac{24}{(6i+2)^2}-\frac{8}{(6i+3)^2}-\frac{6}{(6i+4)^2}-\frac{1}{(6i+5)^2}\right)$$

$$\frac{\pi^3}{360} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\sinh(n\pi)}$$

$$\pi^2 = \frac{2}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{729^n}\left(\frac{243}{(12n+1)^2}-\frac{405}{(12n+2)^2}-\frac{81}{(12n+4)^2}-\frac{27}{(12n+5)^2}-\frac{72}{(12n+6)^2}-\frac{9}{(12n+7)^2}-\frac{9}{(12n+8)^2}-\frac{5}{(12n+10)^2}+\frac{1}{(12n+11)^2}\right)$$

Brown

Alors, prenons un entier naturel non nul *n*. Par exemple *10*. Jusqu'ici tout va bien !
Considérons ensuite le plus proche multiple supérieur ou égal de *n-1*.
Dans notre cas, on trouve *18* car il est multiple de *9=10-1* et supérieur à *10*.
Réitérons le procédé en considérant le plus proche multiple supérieur ou égal de *n-2*, ici *24*, puis de *n-3* (*28*), de *n-4* (*30*) et ainsi de suite pour *n-k* jusqu'à ce que l'on arrive à *k=n-1*. On note *f(n)* le résultat (*f(10)=34*).

Eh bien, figurez-vous que $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{f(n)} = \pi$

Woon

$$a_0 = 1 \qquad a_n = \sqrt{1+\left[\sum_{k=0}^{n-1} a_k\right]^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{a_n} = \pi$$

Bellard

$$\pi = \frac{1}{64}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2^{10i}}\left(-\frac{32}{4i+1}-\frac{1}{4i+3}+\frac{256}{10i+1}-\frac{64}{10i+3}-\frac{4}{10i+5}-\frac{4}{10i+7}+\frac{1}{10i+9}\right)$$

$$\pi = \frac{1}{740025}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3P(n)}{\binom{7n}{2n}2^{n-1}} - 20379280\right)$$ avec

$$\begin{aligned} P(n) \quad = \quad & -885673181n^5 + 3125347237n^4 - 2942969225n^3 \\ & +1031962795n^2 - 196882274n + 10996648 \end{aligned}$$

Mandelbrot/Bolle

Considérons le point *c=(-0.75,X)* du plan complexe, c'est à dire un point à la verticale du cou de l'ensemble de Mandelbrot (le goulot d'étranglement).

Soit n le nombre d'itérations à partir duquel la récurrence quadratique caractéristique de l'ensemble de Mandelbrot $Z_{n+1}=Z_n^2+c$ avec $Z_0=0$ diverge ($|Zn|\geq 2$). Avec X de plus en plus petit, on a :

$$\lim_{X\to 0} X * n = \pi$$

Théorème des résidus - E. Estenave - C. Frétigny

Je ne peux toutes les mettre, il y en a trop ! Vous les découvrirez au fil de la lecture de la page. Voici néanmoins quelques exemples :

$$\forall k \in Z,\ \pi = 16(2k+1)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$$ mais aussi :

$$\forall j \in N,\ \pi = 4\prod_{k=0}^{j}\left(4(2k+1)^4\right)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\prod_{k=0}^{j}\left((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4\right)}$$

$$\pi = 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cosh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}$$

$$\forall k \in Z,\ \pi = \frac{144}{5}(6k+1)^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)((6n+1)^3 + 8(6k+1)^3)}$$

$$\pi^3 = 2\frac{\sin(\pi.m)^3}{1+\cos(\pi.m)^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-m)^3} \ldots$$

Anonymes (voir le grenier)

D' après les sommes de Riemann

$$4\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad \frac{4}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \pi \qquad 4\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Triangle des c(n,k)

$$\forall n \in N,\quad soit\quad C_n = \frac{d^n f}{dx^n}(0) \quad où \quad f(x) = \frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\frac{(2n+2)C_n}{C_{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Quelques suites factorielles (voir Gosper)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\binom{2n}{n}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\binom{2n}{n}} = \frac{2}{27}\left(\pi\sqrt{3}+9\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n}{\binom{2n}{n}} = \pi + 3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 3 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{(2n+1)16^n} = \frac{\pi}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2\binom{2n}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{36}{17n^4\binom{2n}{n}} = \frac{\pi^4}{90} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi^2}{9}$$

(1) provient d'Euler et (2) de Comtet (1974)

Capes 1994

Soit D le disque de centre z_0 et rayon r :

$D(z_0,r)=\{z\in C \mid |z-z_0|\leq r\}$

et $r_k=min\{r>0,\ \exists z_0\in C,\ card(Z[i]\cap D(z_0,r))\geq k\}$

alors $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{r_k^2}{k} = \pi$

Polynômes de Chebyshev

Un premier exemple :

$$U_1 = \frac{99}{100} \quad U_2 = \frac{4801}{5000} \quad U_n = \frac{99}{50}U_{n-1} - U_{n-2}$$

$$V_1 = \frac{99}{4780} \quad V_2 = -\frac{11414399}{11424200} \quad V_n = \frac{99}{2390}V_{n-1} - V_{n-2}$$

$$\pi = 8\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{10^{2n-1}(2n-1)}\left(4U_{2n-1} - V_{2n-1}\right)$$

Si l'on connaît une relation du type : $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{m} b_k \operatorname{Arctan}(a_k)$ alors on peut construire les suites U_n^k et la série suivante :

$$U_1^k = \frac{99}{20} a_k \quad U_2^k = 2\left(\frac{99}{20} a_k\right)^2 - 1 \quad U_n^k = \frac{99}{10} a_k U_{n-1}^k - U_{n-2}^k$$

$$\pi = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{10^{2n-1}(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k U_n^k \right)$$

Vous voulez autre chose que le *10* au dénominateur ? Soit, voici une formule encore plus générale pour $p^2>1$, toujours en partant de la relation avec les *Arctan* :

$$U_1^k = \frac{p^2 - 1}{2p} a_k \quad U_2^k = 2\left(U_1^k\right)^2 - 1 \quad U_n^k = \frac{p^2 - 1}{p} a_k U_{n-1}^k - U_{n-2}^k$$

$$\pi = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{p^{2n-1}(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k U_n^k \right) = 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{p^{2n-1}(2n-1)} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k T\left(n, \frac{p^2 - 1}{2p} a_k\right) \right)$$

avec *T(n,x)* le polynôme de Chebyshev.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr