Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

John Machin
(1680 - 1751)

A retenir !

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

Tranches de vie

John Machin est un mathématicien assez peu connu. Il est né en *1680* et fut professeur d'astronomie à Londres. Il découvre en *1706* la formule $\pi=16\arctan(1/5)-4\arctan(1/239)$, ce qui, grâce au développement en série entière de *arctan* connu depuis Grégory, lui permet d'obtenir la formule ci-dessus... Mais pour les connaisseurs de l'histoire de *Pi*, Machin a joué un grand rôle, d'abord parce que ce fut le premier à calculer *100* décimales au moyen de sa formule, mais surtout parce qu'il a ouvert la voie à la recherche de formules d'*arctan*...

Autour de π

Les formules d'*arctan* sont un moyen simple et rapide de calculer des décimales de *Pi*.

Connaissant le développement $\arctan(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ pour x entre *-1* et *1*, il suffit alors de trouver des combinaisons d'arctan donnant $\pi/4=\arctan(1)$. Plus le terme à l'intérieur de la parenthèse d'*arctan* est petit, plus la série associée converge vite. Aujourd'hui encore, on vérifie parfois les calculs des décimales de *Pi* grâce à ce type de formule... Il est vrai que l'extraction de racines carrées est toujours fastidieux et qu'une suite de rationnels est bien utile...
Un des derniers records en date (*51* milliards de décimales) a été vérifié avec la formule de Gauss.
Les autres formules d'arctan célèbres dont la combinaison est égale à π (voir historique) :
(convention *x.arctan(1/y)->x*y*)

*16*5-4*239*	donc, on l'aura retenu, elle est de Machin
*20*7+8arctan(3/79)*	Euler *1755*
*4*2+4*3*	Euler ou Hutton *1776* tout le monde n'est pas d'accord...
*16*5-4*70+4*99*	Euler, encore lui ! *1764*
*4*2+4*5+4*8*	L. von Strassnitzky
*8*3+4*7*	Charles Hutton *1776* puis Euler *1779*
*8*2-4*7*	Hermann
*12*4+4*20+4*1985*	S. Loney *1893* puis Störmer *1896*
*32*10-4*239-16*515*	S Klingenstierna *1730*
*48*18+32*57-20*239*	du grand Gauss lui-même !
*48*38+80*57+28*239+96*268*	Gauss à nouveau...
*24*8+8*57+4*239*	Störmer *1896*
Et par ordre d'efficacité...	en facilité de Calcul
*44*57+7*239-12*682*	*85,67%*
*22*28+2*443-5*1393-10*11018*	*88,28%*
*17*23+8*182+10*5118+5*6072*	*92,41%*
*88*172+51*239+32*682+44*5357+68*12943*	*93,56%*
*100*73+54*239-12*2072-52*2943-24*16432*	*96,38%*
*12*18+8*57-5*239*	*96,51%*
*8*10-1*239-4*515*	*96,65%*
*44*53-20*443-5*1393+22*4443-10*11018*	*97,09%*
*17*22+3*172-2*682-7*5357*	*97,95%*
*16*20-1*239-4*515-8*4030*	*99,13%*
*61*38-14*557-3*1068-17*3458-34*27493*	*99,14%*
*227*255-100*682+44*2072+51*2943-27*12943+88*16432*	*99,32%*
*24*53+20*57-5*239+12*4443*	*99,61%*
*127*241+100*437+44*2072+24*2943-12*16432+27*28800*	*99,92%*
*4*5-1*239*	*100%*

On mesure le coût de calcul d'une formule telle que celle de Machin par *1/log(5)+1/log(239)*.
C'est le sens des pourcentages ci-dessus...

Je me suis moi-même amusé à chercher quelques formules et ai trouvé entre autres

*128*107+128*122+28*239+96*268+48arctan(19/2167) et*

*732*530+732*563+128arctan(3/2611)+332arctan(27/64589)+48arctan(53/55479)+*
*+64arctan(6/15617)+28arctan(6/15617)+28*9703+100*14633*

qui sont d'un coût de calcul important mais à convergence rapide.

Le site le plus complet sur les *arctan* (et qui étudie l'efficacité de ces formules...) est www.ccsf.caltech.edu/~roy/pi.formulas.html

Précision

Cherchons à estimer environ le nombre de termes qu'il faut calculer dans la série pour obtenir *d* décimales justes de *Pi*. On peut observer d'après le développement de arctan en série qu'il va falloir estimer *n* tel que $\frac{a}{(2n+1)b^{2n+1}} < 10^{-d}$, ce qui revient après simplifications à $n > \frac{d}{2\log(b)}$. Etant donné que, dans la combinaison des *arctan*, c'est le terme où *b* est le plus petit qui prédomine, pour la formule de Machin, on a alors $n>0{,}72d$, ce qui est à peu près bien respecté d'après les essais...

Démonstration

Il serait fastidieux - et pour tout dire inutile ! - de démontrer entièrement la formule de Machin alors que le principe est surtout important... Il suffit de connaître quelques résultats pour entrevoir la démonstration complète ou le moyen de trouver des formules similaires... Les voici :

1) $\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ (par composition de *tan* et en évitant $ab=1$...)

2) $\arctan\left(\frac{1}{n}\right)=\arctan\left(\frac{1}{n+p}\right)+\arctan\left(\frac{p}{n^2+np+1}\right)$ (immédiat par la formule précédente (1))

3) $\frac{\pi}{4}=\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+\arctan(x)$ (toujours évident avec (1))

4) $k\pi=\arctan\left(\frac{b_1}{a_1}\right)+\arctan\left(\frac{b_2}{a_2}\right)+\ldots+\arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ avec a_i, b_i, k entiers

si et seulement si $(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\ldots(a_n+ib_n)$ a une partie imaginaire nulle.

(on remarquera que c'est le cas pour la formule de Machin avec $a_i=5$, $b_i=1$ pour $i=1,\ldots,16$ et $a_i=239$, $b_i=-1$ pour $i=17,\ldots 20$ puisque $(5+i)^{16}(239-i)^4=-68138660780357615718 4$)

La formule provient du fait que le logarithme néperien est défini en complexe par $\ln(a+ib)=\frac{\ln(a^2+b^2)}{2}+i\left(\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+p\pi\right)$ où *p* est entier relatif, et la propriété $\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$ fait le reste...

5) du même genre : $m.\arctan\left(\frac{1}{a}\right)+n.\arctan\left(\frac{1}{b}\right)=k\frac{\pi}{4}$ avec *k*, *a*, *b* entiers

si et seulement si $(1-i)^k(a+i)^m(b+i)^n$ est un réel.

Essais

n remplace l'infini dans la série en haut...

n=2 : on obtient *3,14182* (3)
n=10 : *3,1415926535897932 94* (16)
n=50 : *72* décimales justes

on a donc une convergence d'environ *1.4n* (proche de *1/0.72=1,388...* trouvé au dessus)

Accélération de la convergence

Bizarrement, si le bon vieux *Delta2* d'Aitken fonctionnait bien sur la série de Leibniz de même type, il semble que les termes de puissance *(2k+1)* désorientent un peu le *Delta2*. Son utilisation est donc moins rentable que le calcul d'un rang supplémentaire dans la série.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr