Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Johann Heinrich Lambert
(1728 - 1777)

Ca, c'est du théorème...

π est irrationnel !!! (et en fait π^2 également d'après Legendre...)

Tranches de vie

De milieu modeste et quittant l'école à *12* ans, Johann Lambert est un autodidacte, et se forme un esprit complet et imaginatif. On raconte d'ailleurs que Frédéric le Grand lui demanda un jour dans quelle science il était le plus compétent. Très humblement, Lambert lui répondit "Toutes" !
Travaillant sur les prémices des géométries non euclidiennes, mais s'intéressant également aussi à la philosophie et la physique, Lambert reste célèbre pour avoir démontré en *1761* l'irrationnalité de *Pi*, ce que nous allons faire également !

Autour de π

En fait, l'irrationnalité de *Pi* est un résultat attendu mais fort utile car c'est à peu près le seul à donner des informations sur les décimales de *Pi* : Celles-ci ne sont pas périodiques !
Lambert démontre précisément le théorème suivant : si *x#0* est rationnel, alors *tan(x)* est irrationnel.
Or, par contraposée, $tan(\pi/4)=1$ donc $\pi/4$ et finalement π sont irrationnels !

Démonstration

La démonstration de Lambert (*1761*) est un peu lourde mais donnons-en tout de même un résumé!
En effet, les autres preuves que j'ai pu trouver sur le net utilisent une autre méthode, toujours la même... (voir Liens)
Donc, varions les plaisirs !

Le principe est de trouver un développement de *tan(x)* qui possède des propriétés particulières.

Lemme 1 :

Considérons la fraction continue x, convergente et illimitée : $x = \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \dots}}}$

avec a_i et b_i entiers relatifs.

Si $|a_i| < |b_i|$ à partir d'un certain rang, alors x est irrationnel.

Démonstration :

Supposons que dès le rang $i=1$, on a $|a_i| < |b_i|$ (ce qui n'enlève pas de généralités...)

Pour $i \in N^*$, on a donc $b_i - 1 < b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} < b_i + 1$ et donc puisque a_i et b_i sont des entiers séparés d'au moins une unité, on obtient : $\left|b_i + \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\right| > |a_i|$.

Le terme en plus $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$ par rapport à l'hypothèse initiale est de valeur absolue inférieure à 1 donc ne peut faire changer le signe de la fraction (car b_i est un entier).

Ceci nous indique que le signe n'a pas changé et donc, on en conclut que $\cfrac{a_i}{b_i + \cfrac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}$ est du signe de $\frac{a_i}{b_i}$. Sa valeur absolue est de plus inférieure à 1 d'après l'inégalité ci-dessus.

De façon similaire, on obtient que $\cfrac{a_{i-1}}{b_{i-1} + \cfrac{a_i}{b_i + \cfrac{a_{i+1}}{b_{i+1}}}}$ est du signe de $\frac{a_{i-1}}{b_{i-1}}$ et de valeur absolue inférieure à 1.

Par récurrence descendante immédiate, on peut écrire finalement que x est du signe de $\frac{a_1}{b_1}$, et de module inférieur à 1 ($|x| \leq 1$).

Pour $|x| = 1$, le développement n'est pas intéressant à étudier car d'un type très particulier...
Supposons donc $|x| < 1$ avec x rationnel :

$$x = \frac{p}{q} = \frac{a_1}{b_1 + p_1} \quad \text{donc} \quad p_1 = \frac{qa_1 - pb_1}{p} = \frac{r}{p}$$

Comme dans l'étude précédente, p_1 a les mêmes propriétés que x, c'est à dire $|p_1| < 1$ et donc, on en conclut $|r| < |p|$.
Mézalors ! En itérant le procédé, on construit une suite infinie de fractions, leurs numérateurs étant des entiers de module strictement décroissant, ce qui est parfaitement absurde !
On conclut finalement à l'irrationalité de x.

Lemme 2 :

On a pour x tel que sa tangente soit définie : $\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \dots}}}$

Démonstration :

On utilise pour cela les développements de *sin* et *cos* :

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}} = \frac{x}{\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}}$$

Si l'on écrit tan(x) sous la forme

$$\tan(x) = \frac{x}{1 + R_1}, \quad \text{on reconnaît} \quad R_1 = -x^2 \frac{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n)x^{2n-2}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}} = \frac{-x^2}{\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+2) x^{2n}}{(2n+3)!}}}$$

et de même, on peut alors écrire : $R_1 = \dfrac{-x^2}{3 + R_2}$. En itérant le procédé, on construit ainsi :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \dots \cfrac{}{\dots - \cfrac{x^2}{(2k-1) + R_k}}}}}.$$

Par récurrence presque immédiate, on a par ailleurs

$$R_k = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2k)x^{2n+2}}{(2n+2k+1)!}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(2n+2)(2n+4)\ldots(2n+2k-2)x^{2n}}{(2n+2k-1)!}}$$ et donc on obtient finalement :

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ldots}}}}$$

Réciproquement, on doit vérifier (ce que je n'ai pas du tout envie de faire !) que la fraction obtenue converge effectivement vers *tan(x)*. Le principe n'est pas exactement le même que celui exposé pour la démonstration de la fraction continue de Lord Brounker. Avec les notations de ce dernier site, dans notre cas, il faut montrer que les réduites P_n et Q_n convergent uniformément respectivement vers *sin(x)* et *cos(x)*.

Théorème de Lambert : π est irrationnel

Pour ce dernier résultat, je ne vais pas utiliser le traditionnel $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ considéré par Lambert. En effet je n'ai toujours pas compris comment ce résultat peut être exploité alors que l'on a exclu le cas *x=1* dans la démonstration initiale (mais je dois être bête...).

Pour simplifier, on va donc prendre *tan(π)=0*, ce qu'a utilisé Legendre pour montrer que π^2 était irrationnel.
En prenant $x=\pi$, on a alors

$$1 - \cfrac{\pi^2}{3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \ldots}}} = +\infty \quad \text{donc} \quad 3 - \cfrac{\pi^2}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \ldots}}} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{3}{\pi^2} = \cfrac{1}{5 - \cfrac{\pi^2}{7 - \cfrac{\pi^2}{9 - \ldots}}}$$

Remarquons alors que $(2k+1)>\pi^2$ dès $k=5$ et donc qu'en vertu du lemme *1*, $3/\pi^2$ et donc π^2 est irrationnel (c'est le théorème de Legendre). On a finalement également : π est irrationnel.

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr