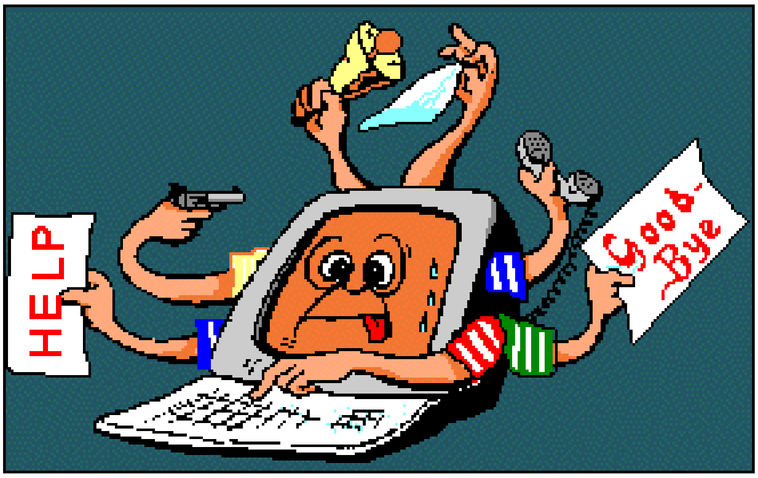
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr




Les ordis au travail !

---

# Un génie venu d'Inde

Alors que les recherches sur *Pi* se sont un peu essoufflées en ce début du *XXe* siècle à cause de la théorie des ensembles de Cantor et des problèmes de Hilbert qui occupent les mathématiciens, un extraordinaire autodidacte indien du nom de Ramanujan commence à faire parler de lui. Je ne vais pas reprendre son histoire complète qui est disponible sur sa page, mais il représente les premières avancées sérieuses sur *Pi*, depuis la démonstration de la transcendance *30* ans plus tôt par Lindemann... Il reprend les études des Thêta fonctions, en vogue à la fin du XIXe siècle, et en tire des propriétés qui permettent d'évaluer *Pi* plus rapidement qu'avant, mais toujours avec des convergences linéaires. Une des plus connues (*1914*) est sans doute :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}\right)^{-1}$$

Sa passion pour *Pi* puis sa collaboration avec Hardy permettent d'élaborer une des plus belles théories des mathématiques modernes à mon sens, celle des équations modulaires. Malheureusement, la valeur de son travail ne sera pas reconnue immédiatement à cause de ses notations non standard qui rendent difficiles la lecture de ses carnets et sa (malheureuse) habitude de ne pas fournir de démonstrations... On peut penser de plus que la théorie n'était pas encore vraiment arrivée à maturité, Ramanujan était trop en avance.
Après Ramanujan qui meurt prématurément en *1920*, c'est le désert... jusqu'en *1976*

# L'attentisme

Entre *1920* et *1976*, pas de progrès théoriques concernant *Pi*. Bien sûr, l'apparition des ordinateurs permet enfin de dépasser en *1945* le vieux

record de W. Shanks et de se rendre compte d'ailleurs que le calcul de ce dernier... était faux ! Sur les *707* décimales qu'il avait fournies, seules *527* étaient justes. La salle du palais de la découverte à Paris qui arborait fièrement le résultat de Shanks en fut quitte pour une rapide rénovation !
Le record de *1946* par Ferguson s'effectua sur un calculateur de bureau à l'aide d'une des formules d'*arctan*. Et tous les records qui vont suivre utiliseront la même méthode pendant encore trente ans... et ils vont se succéder à un rythme assez soutenu puisque aux *536* décimales de Ferguson, et aux *2037* décimales calculées sur l'ENIAC, premier véritable ordinateur, en *1949*, on arrive à *1* million de décimales en *1973* avec Guilloud. On suit là simplement les progrès des ordinateurs mais la méthode n'a pas changé, on utilise toujours la formule de Machin ou bien ses dérivées.

## Zorro est arrivééé

En *1976*, Eugène Salamin et Richard Brent publient, indépendamment l'un de l'autre, un article sur une nouvelle méthode de calcul des décimales de *Pi*.
Il s'agit d'utiliser la moyenne arithmético-géométrique étudiée par Môssieur Gauss. Ils en tirent un algorithme à convergence quadratique, c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \xrightarrow{m \to \infty} \pi$$

Ca, c'est un progrès décisif ! Le calcul des décimales de Pi se fait alors en un temps quasi-linéaire (*n*log(n)*), contrairement aux formules précédentes. Et pourtant, l'application n'est pas immédiate à cause de l'attente de la mise au point de méthodes de multiplications économiques, puisqu'il faut attendre *1981* pour que le deuxième million de décimales soit atteint par Miyoshi et Kanada. Mais à partir de ce moment, le rythme s'accélère franchement, puisque le pauvre Guilloud, qui tente de garder son record en *1982* en calculant *14* décimales de plus que le couple japonais, se trouve hors du coup à la fin de l'année *1982*, *16* millions de décimales ayant été atteints par Kanada, Tamura et Yoshino !

## Une avalanche de formules !

Les années *80* voient l'éclosion de plusieurs formules très intéressantes concernant *Pi*.
Il y a les formules de type Ramanujan, des séries infinies convergeant linéairement mais assez rapidement pour qu'elles soient utilisées dans les records. Celles-ci sont retrouvées et expliquées grâce au décryptage des carnets de Ramanujan par Bruce Berndt et aux travaux des frêres Borwein et Chudnovsky.
Les premiers se font connaître plus particulièrement en reprenant et

développant la théorie des équations modulaires. Ils montrent ainsi que le résultat de Brent/Salamin est un cas particulier de leur méthode et ils tirent des carnets de Ramanujan des algorithmes très performants, à convergence quadratique, quartique, nonique !
Le plus efficace en termes de rapport temps/rapidité semble être l'algorithme quartique :

$$y_1 = \sqrt{2} - 1 \quad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_n^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_n^4}} \quad \alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2} \quad \alpha_{n+1} = \left((1 + y_{n+1})^4 \alpha_n\right) - 2^{2n+3}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Dès lors, avec une fine programmation des supercomputers (par exemple, utilisation de la transformée de Fourier rapide pour diminuer la complexité d'une multiplication), il n'y a pratiquement plus de limites aux calculs des décimales de *Pi*, seulement celle de la mémoire des ordinateurs et leur disponibilité ! Le premier milliard est atteint par les frères Chudnovsky en *1989* et l'on en est aujourd'hui à *206* milliards de décimales de *Pi* connues grâce à Kanada, toujours lui. Bien sûr, *Pi* ayant un nombre infini de décimales, ce n'est même pas une goutte d'eau, mais les mathématiciens espèrent toujours remarquer, comme les frères Chudnovsky, quelque irrégularité ou propriété dans les décimales de notre constante favorite...

## Derniers progrès en date

Calculer les décimales, ce n'est pas tout, si l'on peut atteindre n'importe laquelle de ces décimales sans avoir besoin de calculer les précédentes, c'est un grand progrès également (théorique, bien sûr !).
Et justement, jeter un pavé dans la mare, c'est ce qu'a fait Plouffe lorsque le *19 septembre 1995* à *0h29*, après des mois de recherche à tâtons, il trouve avec David Bailey et Peter Borwein la formule BBP :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Cette formule permet de calculer en base hexadécimale ou binaire n'importe quel digit de *Pi* en un temps là-encore quasi-linéaire (*n*log(n)*).
D'autres formules similaires apparaissent alors pour les logarithmes. La voie est tracée. Les records ont rapidement fusé ! Du trio Bailey-Borwein-Plouffe qui atteint le *Pi* milliardième digit en binaire, à Fabrice Bellard, un étudiant français qui réussit à atteindre le *1000* milliardième digit en *septembre 1997* pour finir avec Colin Percival qui atteint le *40 000* milliardième digit en *février 1999*, où va-t-on s'arrêter ?
Notons d'ailleurs que Colin Percival utilise la communauté Internet pour parvenir à ses fins !
Cette formule permet par ailleurs de ranger les constantes dans différentes classes mathématiques de plus en plus précises en terme de temps de calcul, comme la classe de Steven *SC2*. Cette classe regroupe les nombres dont on peut calculer les digits binaires en "temps polynômial" et "espace mémoire

*Ln*-polynômial".
Et de plus, il reste toujours à trouver un moyen rapide d'atteindre la *n*-ième décimale (base *10*) et non pas le digit (en binaire). Pour l'instant, on en est à une rapidité en $O(n^2)$ grâce à une méthode astucieuse de Simon Plouffe et une amélioration de Fabrice Bellard, mais cela est encore assez lent.

La prochaine étape est la démonstration de la normalité de Pi, qui n'est peut-être plus très loin, mais beaucoup de boulot reste à faire dans ce domaine.

On le voit, en cette fin de siècle, la recherche sur Pi semble connaître un renouveau et d'importantes avancées théoriques qui, on l'espère tous, ne vont pas s'arrêter de sitôt !

---

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr