Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

La géométrie en état de grâce !
Antiquité - XVIIe siècle

Petit préambule

Derrière cette célèbre constante se cachent près de *4000* ans de mathématiques !
Alors, si les pages consacrées aux mathématiciens se veulent détaillées, rien ne vaut une petite synthèse de l'historique de *Pi*. Cela complètera l'ensemble de ce site qui se veut complet mais léger (enfin j'espère !)...
Avec *Pi*, la machine à explorer le temps est une réalité... Mais bien sûr, pour plus de commodités, le langage moderne et habituel des mathématiques est utilisé ici... Il ne faut pas croire que les Babyloniens écrivaient π et les nombres en décimales. Ils ne connaissaient même pas la trigonométrie et utilisaient la base *60* au lieu de la base *10*, en notation fractionnaire ($a=b+c/60+d/60^2...$). De plus, les signes +, = n'ont été inventés que pendant la renaissance, les écritures de l'antiquité ressemblaient plus à du langage écrit qu'autre chose. Les égyptiens avaient un peu d'avance puisqu'ils utilisaient le système décimal, manipulaient les fractions de numérateur 1, et avaient inventé un signe + (deux jambes vers la gauche) et le - (deux jambes vers la droite). Cela étant dit, retournons aux origines de la légende...

Du haut des pyramides, π nous contemple...

Les premières traces que l'on trouve de l'existence de *Pi* remontent aux environs de *2000* ans av.J.-C. chez les Babyloniens et les Egyptiens. On me demande parfois en quelle année a-t-on découvert Pi ! Je crois qu'il ne faut pas oublier que c'est le résultat d'un long processus. Dans ces civilisations, où l'on avait besoin des figures géométriques de base (cercle, carré...) pour construire des outils par exemple, on s'est visiblement rendu compte assez vite que le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre était constant.

Mais l'on ne savait pas du tout ce que représentait cette constante, et l'on n'avait aucune idée de sa nature. Sans doute pour des besoins pratiques, des tentatives de calcul de cette ocnstante ont eu lieu. Mais là encore, on ne sait pas si les valeurs obtenues étaient tenus pour exactes où si l'on avait conscience (moins probable) d'être tombé sur un objet mathématique différent. Concernant les Babyloniens, une tablette en écriture cunéiforme dite de "Suse", et datant de *2000* av.J.-C. précise une première approximation dans la base *60* alors utilisée :

$$3+\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}=3+\frac{1}{8}=3,125$$

Précision remarquable pour l'époque ! Pour l'obtenir, les Babyloniens ont estimé la différence entre l'aire d'un hexagone (*3*) et celle d'un cercle de diamètre *1*.

De leur côté, les Egyptiens avaient compris que la constante que nous appelons donc maintenant *Pi* dans la formule de l'aire d'un cercle et celle dans la formule du périmètre d'un cercle étaient la même. Et un de leurs scribes est devenu célèbre grâce à *Pi*... En effet, dans le Papyrus de Rhind conservé au British Museum et datant d'environ 1800-1650 av.J.-C., le scribe Ahmès assimile l'aire d'un cercle de diamètre *d* à un carré de côté *a=8d/9* ce qui donne :

$$\pi R^2=\frac{8^2}{9^2}d^2 \quad \Leftrightarrow \quad \pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2\approx 3,16$$

On ignore un peu comment ces civilisations ont obtenu ces résultats, sans doute par approximations avec les moyens de l'époque (cordes, cailloux...), mais remarquons tout de même (soyons beaux joueurs !) que ces moyens rudimentaires ont néanmoins fourni des valeurs correctes à moins d'*1%* près. Les égyptiens calculant avec des fractions de numérateur *1*, c'est d'ailleurs le meilleur rapport entre le diamètre *d* et l'aire *s* qu'ils pouvaient atteindre. En effet :

$$\frac{s}{d}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0,88624 \quad et \quad 1-\frac{1}{8}=0,875 \quad et \quad enfin \quad \frac{8}{9}=1-\frac{1}{9}\approx 0,888$$

Après les Egyptiens et les Babyloniens, c'est un peu le vide... Les Chinois vers *-1200* donnent *3* pour valeur, ce qui dénote tout de même un certain manque de recherches sur le sujet !
La Bible, manquant un peu d'inspiration divine pour l'occasion, fournit vers *-550* av.J.-C. elle aussi, *3* pour valeur de *Pi*. Le passage du fondeur Hiram et de son chaudron est resté célèbre, le voici en termes francisés :
"Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entour d'un cordon de trente coudées".
30/10=3, pas d'erreur. On dira bien plus tard que le passage concernait le contour intérieur du chaudron pour calmer les polémiques, mais l'absence de besoin de précision pour les fondeurs semble être la seule justification....

Heureusement, voilà les Grecs qui vont remettre un peu d'ordre...

Eurêka !!!

Les grecs s'intéressent à divers problèmes géométriques qui sont en relation avec la célèbre constante... Insatiables chercheurs et portés par une rigueur qui les honore pour l'époque, ils réfléchissent ainsi entre autre à la trisection de l'angle, la duplication du cube, et surtout la quadrature du cercle... Cette dernière fut introduite par Anaxagore de Clazomène (*500-428* av.J.-C.) après un séjour en prison pour impiété (ça ne rigolait pas en ce temps là !).
L'ardeur de la recherche de la solution (construire un carré de même aire qu'un cercle à l'aide d'une règle et d'un compas) ne s'est jamais démentie, et avec raison, puisque l'on prouvera bien plus tard que ce problème est équivalent à la transcendance de *Pi*. En effet, les seuls nombres que l'on peut construire avec une règle et un compas sont des combinaisons de racines et de fractions, c'est à dire les solutions d'équations polynomiales à coefficients rationnels...
Mais la démonstration de la transcendance de *Pi* ne sera achevée qu'en *1882* par Lindemann et nous sommes toujours dans l'Antiquité.
Alors, revenons à nos amis Grecs... Ce problème les tourmentait et leur manque de définitions cohérentes des limites, par exemple, poussera Antiphon, contemporain de Socrate, à proposer la méthode suivante:

> On circonscrit un polygone à un cercle, et l'on double le nombre de côtés plusieurs fois... Comme l'on sait construire un carré de même aire qu'un polygone et que celui-ci tend à se confondre avec le cercle lorsque le nombre de ses côtés augmente, la quadrature du cercle semble résolue pour n'importe quelle précision.

On sait bien sûr aujourd'hui que ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour tout *n* entier qu'elle l'est à la limite.
Ce processus est très intéressant car il va conditionner la méthode d'approximation de *Pi* qui va dominer pendant *2000* ans. On tentera d'approximer numériquement le périmètre d'un cercle en augmentant le nombre de polygones et en trouvant une relation entre le périmètre pour *n* polygones et pour *n+1* polygones.
Archimède s'en inspire avec le succès que l'on sait (et c'est pourquoi nous appellerons cela ensuite un peu abusivement la "méthode d'Archimède") et calcule *3* décimales avec à peu près ce genre de formules en notations modernes :

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + V_n^2}}{V_n}$$

$$6.2^n\, U_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad 6.2^n\, V_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Notons sa virtuosité exceptionnelle puisque tous ses calculs sont basés sur

des considérations géométriques uniquement, sans trigonométrie ni décimales !
Ptolémée améliorera quelque peu le résultat justement au moyen de tables trigonométriques.
Et la nuit mathématique tombe sur l'Occident pendant *1500* ans par la suite... Il est vrai que le système numérique des romains par exemple est peu propice aux calculs (tentez donc de multiplier *LVIII* par *XCVI* !) et ceux-ci ne vont donc pas laisser grand chose derrière eux côté ouvrages de mathématiques.

Voyage, voyage...

En Inde, on travaille aussi puisque Aryabhata propose, vers *500* ap.J.C., *3* décimales exactes. Mais c'est en Chine où le système décimal a toujours été utilisé, que les progrès sont les plus rapides. Tsu Chung Chih semble être le premier à avoir proposé la fraction célèbre *355/113 = 3,14159292...* vers *480* ap. J.-C. soit *6* décimales.
Les Arabes et Perses ne sont pas en reste puisque dans son système Hexagésimal, Al Kashi calcule avec virtuosité *10* digits soit *14* décimales en *1429*... Record absolu !
Mais la notation décimale commence lentement à s'imposer en Europe au Moyen Âge et c'est alors tout naturellement que l'Occident se réveille :

La Renaissance... des mathématiques

C'est Fibonacci, l'un des seuls grands mathématiciens de l'époque et adepte de la notation décimale, qui s'illustre tout d'abord et obtient *Pi=3,1418...* mouais... Précisons que toutes les approximations précédemment citées sont obtenues par la méthode d'Archimède ou une de ses variantes.
Notons aussi que l'on ne cernait pas encore précisément le côté transcendant de Pi (mais c'est un peu normal...) puisque Nicolas de Cues propose au *XVe* siècle $\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right) \approx 3{,}136$. Regiomontanus démontrera (!) que cette valeur est erronée...
Avec simplement *1000* ans de retard sur les Chinois et Tsu Chung Chih, mais c'est son nom qui est resté, Adrian Anthonisz fait la moyenne des valeurs d'encadrement calculées par Archimède et trouve *355/113=3,14159292...* C'est en tout cas ce que nous rapporte son fils qui a publié le résultat en *1625*. Ce qui est extraordinaire avec le recul, c'est de constater que ces valeurs étaient tenues pour exactes pour *Pi*. Depuis les grecs, on savait qu'il existait des nombres plus compliqués que les rationnels (irrationnels) comme $2^{1/2}$. On sentait sans doute que *Pi* était d'une nature encore plus complexe, mais on tentait tout de même de l'exprimer en fonction de nombres simples.
Pendant ce temps, la numérotation décimale fait vite progresser la course aux décimales qui devient un sport en vogue et les records ne quittent plus l'occident...
Le plus célèbre des "coureurs" de décimales, et qui a donné son nom à *Pi* en Allemagne fut Ludolph von Ceulen (*1539-1610*). Ce dernier calcula *20* décimales à l'aide d'un polygone de $60 \cdot 2^{33}$ côtés puis *34* décimales,

toujours par la méthode d'Archimède. Quelle obstination ! Inutile de dire que ce calcul lui prit une bonne partie de sa vie et il fera même graver le résultat sur sa pierre tombale.
On peut encore signaler la formule de Nicolas de Cues (1401 - 1464) :

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

$$\frac{1}{2a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad \frac{1}{2b_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Elle est très intéressante, mais là, un problème se pose à moi ! Cette formule est souvent donnée comme celle "officielle" de la formule d'Archimède comme dans "*Le fascinant nombre Pi*", et pourtant je l'ai découverte sur un TD de maths en prépa intitulé "La méthode de Cues". Et dans "*Le Petit Archimède*", cette formule est considérée comme celle de Grégory... Si quelqu'un connait la véritable paternité de cette suite, qu'il me la précise. Toujours est-il que l'idée de base est toujours celle d'Archimède et qu'il y a plusieurs façons de traduire cela par des algorithmes.

D'autres pistes de recherche

Mais déja, l'ère géométrique semble toucher à sa fin... Les mathématiciens commencent à découvrir d'autres méthodes que celle d'Archimède. Se basant néanmoins toujours sur des considérations géométriques à la base, ils prennent le problème par d'autres côtés... Ainsi, Viete (1540 - 1603) découvre (sans le démontrer, mais bon, ce n'est guère l'époque !) le premier produit infini donnant *Pi* en considérant cette fois-ci l'aire du cercle au lieu du périmètre...

$$\pi = 2 \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

Mais la convergence est si lente qu'il préfère encore utiliser la méthode d'Archimède pour calculer lui-même *9* décimales en *1593*.
Descartes (1596 - 1650), de son côté, prend le problème carrément à l'envers, et partant d'un cercle de périmètre fixé, construit son diamètre. C'est la méthode des isopérimètres... Ingénieux... La convergence n'est guère plus rapide (toujours linéaire en tous les cas), et ce n'est pas étonnant puisque ce sont à peu près les mêmes considérations géométriques qui forment les suites par récurrence.

La quadrature du cercle continue, elle, à poser de véritables problèmes... Sortant de l'ère géométrique qui n'en a pas donné de solutions, l'analyse va s'y pencher, et on le verra, avec succès. Notons que l'Académie des Sciences en France, ayant promis une récompense pour la solution, reçoit à cette époque plusieurs dizaines de preuves erronées, . Comme le dit "*Le petit Archimède*", la palme revient dans ce domaine à un nommé Liger qui commmençait par démontrer que $\sqrt{24} = \sqrt{25}$, le reste suit...

Suite de l'histoire de *Pi* à travers les siècles à la page Ah, enfin l'analyse!

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr