



Christian Frétny

## Des applications du théorème des résidus E. Estenave / C. Frétny

### Une pluie de formules !

Je ne peux toutes les mettre, il y en a trop ! Vous les découvrirez au fil de la lecture de cette page. Voici néanmoins quelques exemples :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = 16(2k+1)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)} \text{ mais aussi :}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = 4 \prod_{k=0}^j (4(2k+1)^4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j ((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$$

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cosh\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = \frac{144}{5} (6k+1)^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)((6n+1)^3 + 8(6k+1)^3)}$$

$$\pi^3 = 2 \frac{\sin(\pi m)^3}{1 + \cos(\pi m)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-m)^3} \dots$$

### Autour de $\pi$

La première série en haut de cette page pour  $k=0$  semble due à E. Estenave, Docteur ès Sciences, et fut publiée par son auteur avec deux démonstrations un peu confuses dans un petit livre "*Sur une série servant à définir approximativement le nombre Pi*" en 1901. Christian [Frétny](#), enseignant chercheur à l'[ESPCI](#) dans le laboratoire de physique quantique, est tombé sur ce livre dans une librairie de Paris. Il m'a d'ailleurs raconté qu'une main exigeante et anonyme avait barré au crayon le "définir" du titre et l'avait remplacé par "déterminer" avec une annotation : "Parlez français" ! Toujours est-il que C. [Frétny](#) m'a proposé cette série et une de ses généralisations pour compléter ma collection, en me

faisant part d'une autre démonstration qui utilisait le théorème des résidus. Après quelques lectures sur le sujet (je n'avais jamais étudié les fonctions holomorphes, introuvables en prépa !), nous avons engagé une petite correspondance en octobre au fur et à mesure que d'autres séries apparaissaient par la même méthode. Cette page tente de synthétiser les résultats de cette exploration, bien sûr très incomplète, vu la richesse de la méthode. Plusieurs pistes sont proposées, avec au moins un exemple pour chacune d'elle, lorsque le temps ou l'intuition ont manqué pour explorer plus profondément l'idée.

Nous ne savons d'ailleurs pas si une étude complète ou une classification existe sur le sujet, ou bien si certaines de ces séries, il est vrai peu performantes, apparaissent simplement au détour d'exercices, ni même si elles sont toutes connues (enfin, là, il ne faut peut-être pas rêver et Maple en connaît une bonne partie, d'ailleurs !). L'intérêt calculatoire n'est pas énorme, bien évidemment, et c'est d'ailleurs peut-être pourquoi je n'ai pas retrouvé ailleurs ces formules, mais la théorie, les généralisations et l'esthétique des séries sont très intéressantes. Sans compter que l'on peut redémontrer ainsi une bonne partie des formules d'[Euler](#) de façon très rapide.

A ma connaissance, et après quelques recherches, rien n'existe sur le sujet sur le web, si vous avez des renseignements, n'hésitez donc pas !

## Le théorème des résidus

Tout d'abord, rappelons quelques définitions avant le fameux théorème des résidus qui sert de base à tous ces calculs :

On se place dans le cadre des fonctions de la variable complexe avec  $f(z)$  holomorphe (dérivable) sur un ouvert  $E$ , et à valeurs dans  $C$ . Soient  $z_i$  avec  $i \in I$  les pôles de  $f$  (c'est à dire que pour tout  $i$  de  $I$ , il existe un  $n_i$  entier minimal, appelé

l'ordre du pôle, tel que  $(z-z_i)^{n_i} f(z)$  soit dérivable en  $z_i$ ).

Le développement de Laurent d'une fonction holomorphe, sur une couronne (espace entre deux cercles) dans l'espace complexe, est donné par :

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$$

On définit le résidu de  $f$  en  $z_i$  comme le coefficient  $a_{-1}$  dans le développement de Laurent de  $f$  avec  $z_i$  à la place de  $z_0$ .

Lorsque  $z_i$  est un pôle simple, cela revient à calculer :

$$\text{Res}(f, z_i) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i) f(z)$$

Pour un pôle d'ordre  $m$ , on a la formule :

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[ (z - z_i)^m f(z) \right]_{z=z_i}$$

On considère ensuite un contour fermé  $G$  de classe  $C^1$  contenu dans  $E$  et qui englobe les pôles  $z_i$ ,  $i \in J$ ,  $J \subset I$ .

On définit l'indice de  $G$  en  $z_i$  (winding number) par :

$$\text{Ind}_G(z_i) = \frac{1}{2i\pi} \oint_G \frac{dz}{z - z_i}$$

ce qui correspond en pratique au nombre de passages du contour  $G$  (compté dans le sens trigonométrique) autour du

point  $z_i$ .

Alors, finalement, le théorème des résidus nous donne :

$$2i\pi \int_G f(z) dz = \sum_{i \in J} \text{Res}(f, z_i) \text{Ind}_G(z_i)$$

Intuitivement, cela veut dire que l'on peut connaître l'intégrale de  $f$  sur un contour fermé si l'on connaît le comportement de  $f$  en ses points singuliers que sont ses pôles. Ce théorème étonnant est évidemment très important en analyse complexe, et, vous allez le voir, également dans la recherche de séries tendant vers  $\pi$  !

## Application du théorème à une classe de fonctions

Dans toute la suite, les contours utilisés seront de simples contours carrés, donc l'indice de ces contours en n'importe quel point à l'intérieur sera toujours 1 d'après la définition (pratique !). Intuitivement, on a maintenant d'un côté une somme de résidus, c'est ce qui va donner les séries, et de l'autre une intégrale, que l'on espère donc calculable facilement. Pour certaines fonctions, cette intégrale est nulle lorsque l'on fait tendre le contour vers l'infini, c'est le sens de la classe de fonctions que l'on introduit ici :

Soit  $g(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)} f(z)$ . On considère comme contour fermé  $G(N)$ , sur lequel on va

intégrer, le carré de sommets :  $\pm \left( N + \frac{1}{2} \right) \pm i \left( N + \frac{1}{2} \right)$ . On évite ainsi de passer par les pôles de  $\cotan$  (noté  $\cot$ ), c'est à dire les zéros de  $\tan(\pi z)$ , c'est à dire encore les  $n \in \mathbb{Z}$  (ouf..).

Montrons maintenant que l'intégrale de  $g$  sur ce contour  $G(N)$  tend vers 0 lorsque  $N$  tend vers l'infini. Sur le montant vertical de droite,  $z = N + 1/2 + iy$ ,  $y$  variant de  $-N - 1/2$  à  $N + 1/2$ , on a :

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi \left( N + \frac{1}{2} + iy \right)} + e^{-i\pi \left( N + \frac{1}{2} + iy \right)}}{e^{i\pi \left( N + \frac{1}{2} + iy \right)} - e^{-i\pi \left( N + \frac{1}{2} + iy \right)}} \right| = \left| \frac{e^{-\pi y + i\pi \left( N + \frac{1}{2} \right)} + e^{\pi y - i\pi \left( N + \frac{1}{2} \right)}}{e^{-\pi y + i\pi \left( N + \frac{1}{2} \right)} - e^{\pi y - i\pi \left( N + \frac{1}{2} \right)}} \right| = \left| \frac{1 + e^{2\pi y - i\pi(2N+1)}}{1 - e^{2\pi y - i\pi(2N+1)}} \right| = \left| \frac{1 - e^{2\pi y}}{1 + e^{2\pi y}} \right| \leq 1$$

$$\text{car } e^{-i\pi(2N+1)} = (-1)^{2N+1} = -1$$

et sur le montant horizontal du haut,  $z = x + i(N + 1/2)$ ,  $x$  variant de  $-N - 1/2$  à  $N + 1/2$ , on a :

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{i\pi \left( x + i \left( N + \frac{1}{2} \right) \right)} + e^{-i\pi \left( x + i \left( N + \frac{1}{2} \right) \right)}}{e^{i\pi \left( x + i \left( N + \frac{1}{2} \right) \right)} - e^{-i\pi \left( x + i \left( N + \frac{1}{2} \right) \right)}} \right| = \left| \frac{1 + e^{\pi(2N+1) - 2i\pi x}}{e^{\pi(2N+1) - 2i\pi x} - 1} \right| \leq \frac{e^{\pi(2N+1)} + 1}{e^{\pi(2N+1)} - 1} \leq 1 + \frac{2}{e^{\pi(2N+1)} - 1} \leq 2$$

$$\text{car } \exp(\pi(2N+1)) - 1 > 2 \text{ pour } N \geq 0 \text{ et } |a + b| \leq |a| + |b| \text{ et } |a - b| \geq \left| |a| - |b| \right|$$

donc, sur ces deux montants,  $|\cot(\pi z)| \leq 2$ , et comme  $\cot$  est impaire, on en déduit que l'on a ce résultat sur tout le carré. Comme dans  $R$ , on peut alors majorer l'intégrale par la longueur de la courbe \* le maximum de la fonction. Le carré ayant pour périmètre  $4 \cdot (2N + 1)$ , on obtient :

$$\int_{G(N)} g(z) dz \leq 4(2N+1) \cdot 2\pi \cdot \text{Max}_{G(N)} |f(z)|$$

Or, pour  $z$  sur le carré, par exemple sur le montant vertical droit, on a  $z=(N+1/2)+iy$  et  $|z| \geq (N+1/2)$  (de même pour les autres montants). On peut donc encore affiner :

$$\int_{G(N)} g(z) dz \leq a \cdot \text{Max}_{G(N)} |z \cdot f(z)|$$

Faisons maintenant tendre le contour vers l'infini, c'est à dire faisons tendre  $N$  vers l'infini ou encore  $|z|$  vers l'infini pour  $z$  sur le contour carré. Il reste à choisir une fonction  $f$  telle que  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z \cdot f(z)| = 0$  et l'intégrale tendra vers 0. Cette forme rappelle un peu le critère de Riemann pour les séries réelles, et de même, toute fonction  $f$  de la forme d'une fraction rationnelle ayant un degré du dénominateur supérieur de plus d'un au degré du numérateur conviendra. En particulier, tout  $f$  de la forme de  $(z^a + c)^{-1}$  avec  $a > 1$  convient.

On a utilisé  $\tan$  dans  $g(z)$  mais on peut aussi regarder du côté de  $\sin$  et  $\cos$ . Pour  $\cos$ , pas de problème si l'on ramène  $1/\cos$  à sa forme exponentielle, puisque l'on a une somme d'exponentielles minorables au dénominateur de la même façon que pour  $\cot$ .

Pour majorer  $1/\sin$ , il suffit d'utiliser la relation  $\frac{1}{\sin^2(z)} = 1 + \cot^2(z)$ , puisque l'on vient de majorer  $\cot(\pi z)$  en

module par 2. On peut encore utiliser les fonctions hyperboliques équivalentes ( $\cotanh$ ,  $1/\sinh$ ,  $1/\cosh$ ) mais cela semble à peu près tout.

Nous voici donc avec une intégrale qui tend vers 0 si le contour tend vers l'infini. Mais cela veut aussi dire que tous les pôles  $z_n$  de notre fonction  $g$  pour  $n$  dans  $I$  vont être contenus dans ce contour infini.

Le grand avantage est que  $\cot(\pi z)$ , comme ses équivalents en  $1/\cos$  et  $1/\sin$ , admet une infinité de pôles, qui sont ici les  $z_n = n$  pour  $n$  dans  $Z$ , et la somme des résidus en ces points va donc produire une série infinie.

Après s'être occupé de l'intégrale qui est nulle, et comme l'on a vu que les indices du contour infini en les pôles  $z_i$  seront égaux à 1, notre cher théorème des résidus devient donc ici à condition de choisir  $f$  correctement :

$$\sum_{n \in I} \text{Res}(g, z_n) = 0$$

Notre objectif, puisque les suites auront une convergence lente, est qu'au moins elles soient rationnelles. Examinons maintenant une première application afin d'observer cette méthode simple avant d'expliquer plus en détail pourquoi cela marche et d'orienter ainsi par la suite les pistes de recherche :

**Exemple préliminaire**  $g(z) = \frac{8\pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) z(z^m + p)}$

\*\*\* Cas  $m=4$  et  $p=4$

C'est vraiment celui qui marche le mieux, je détaille donc les calculs, ce dont je me passerai volontiers par la suite ! Il est tout d'abord clair que cette fonction rentre bien dans le cas étudié précédemment, son intégrale sur le contour infini est donc nulle.

Voyons maintenant les pôles de  $g$  et leurs résidus :

\*  $0$  est un pôle (pour  $z$  au dénominateur), son résidu est obtenu en calculant  $\lim_{z \rightarrow 0} z.g(z) = 2\pi$

\* Les  $(2n+1)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  sont les pôles correspondant aux racines du  $\cos$ , leurs résidus respectifs sont :

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2n+1} (z - 2n - 1).g(z) &= \lim_{z \rightarrow 2n+1} \frac{8\pi(z - 2n - 1)}{\left( -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)(z - 2n - 1) + O\left((z - 2n - 1)^2\right) \right) z(z^4 + 4)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2n+1} \frac{8}{\left( -\frac{(-1)^n}{2} + O(z - 2n - 1) \right) z(z^4 + 4)} = -\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4)} \end{aligned}$$

Excellent, d'un côté, on a  $\pi$  dans le premier résidu, et de l'autre la somme des résidus en  $2n+1$  donne une série sur  $n \in \mathbb{Z}$  plutôt sympathique !

Oui, mais voilà, il y a encore les résidus de  $g$  aux racines  $m$ -ièmes de  $-p$  qui sont aussi des pôles de  $g$  car elles annulent  $z^m + p$ . Il faudrait que leur somme soit agréable, le plus souvent nulle, ce serait parfait. Dans le cas présent les racines 4-ièmes de  $4$  sont  $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ , elles sont simples heureusement, et c'est d'ailleurs ce qui limitera les possibilités par la suite pour d'autres valeurs de  $m$ .

\* Calculons les résidus en ces racines. Remarquons avant, dans le cas général, que lorsque l'on manipule une racine  $m$ -ième de  $p$ , il ne faut pas oublier que  $z^m = -p$ . Or, avec  $z(z^m + p)$  au dénominateur de  $g$ , dans le calcul du résidu de  $g$  en une racine  $m$ -ième de  $p$ , notons la  $a_i$ , on a besoin de prendre la valeur en  $a_i$  de

$$\left. z \cdot \frac{z^m + p}{(z - a_i)} \right|_{z=a_i} = z \cdot \frac{0 + (z - a_i) \frac{d(z^m + p)}{dz}(a_i) + O\left((z - a_i)^2\right)}{(z - a_i)} \Bigg|_{z=a_i} = a_i \frac{d(z^m + p)}{dz}(a_i) = m a_i^{m-1} = -mp$$

Donc ce terme ne dépend pas de  $a_i$  et seul le  $\cos$  va en dépendre, le résidu de  $g$  en une racine  $m$ -ième de  $p$  est ainsi :

$$-\frac{8\pi}{\cos\left(\frac{\pi a_i}{2}\right) mp} = -\frac{\pi}{2 \cos\left(\frac{\pi(\pm 1 \pm i)}{2}\right)} = -\frac{\pi}{\pm 2 \sin\left(\pm \frac{\pi i}{2}\right)} \text{ dans notre cas } m=4, p=4$$

Mais cela, c'est une très bonne nouvelle car la somme de ces résidus est nulle. En effet, chaque résidu d'une racine s'annule avec celui de sa racine conjuguée

Il nous reste donc finalement qu'à appliquer le théorème des résidus en écrivant que la somme des résidus de  $g$  est nulle :

$$2\pi - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4)} = 0 \Leftrightarrow \pi = 8 \left( \sum_{n=-\infty}^{-1} (\dots) + \sum_{n=0}^{+\infty} (\dots) \right) \Leftrightarrow \pi = 8 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(-2n+1)((-2n+1)^4 + 4)} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\dots) \right)$$

$$\Leftrightarrow \pi = \delta \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(-2n-1)((-2n-1)^4 + 4)} + \sum_{n=0}^{+\infty} (\dots) \right) \Leftrightarrow \pi = \delta \left( 2 \sum_{n=0}^{+\infty} (\dots) \right)$$

et finalement  $\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4)}$  (ouf !)

Généralisation du cas  $m=4$

Considérons la fonction 
$$g^{g1}(z) = \frac{\delta \pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) z (z^4 + 4(2k+1)^4)}$$

(*g1* pour premier type de généralisation) avec  $k$  dans  $N$  (ou dans  $Z$  mais ici,  $(2k+1)^4$  prend les mêmes valeurs lorsque  $k$  est négatif à cause de la puissance 4)

Ici et par la suite, j'utiliserai d'un petit tableau pour présenter les pôles et leurs résidus, c'est tout de même plus clair que si les résultats sont noyés au milieu du texte. De plus, seule la somme des résidus des racines est importante pour le calcul, pas le résidu en une racine, sauf cas particulier, puisque l'on sait que c'est à cause du *sinus* que la somme s'annule.

J'omettrai donc souvent par la suite l'expression du résidu seul en une racine, surtout lors des généralisations, le résultat étant assez pénible !

Pôles	Résidus
0	$\frac{2\pi}{(2k+1)^4}$
(2n+1)	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$
$\pm(2k+1) \pm i(2k+1)$	$\frac{(-1)^k \pi}{\pm 2 \sin\left(\pm \frac{(2k+1)i\pi}{2}\right) (2k+1)^4}$
somme des résidus des racines	0

Ce qui permet de même que précédemment de construire la série suivante :

$$\forall k \in Z, \pi = 16(2k+1)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$$

Notons que si l'on fait tendre  $k$  vers l'infini, le rapport du terme devant la somme et de celui au dénominateur tend vers 4, et l'on retrouve la suite de Leibniz ! Bon, la rigueur est un peu oubliée puisque l'on n'a pas justifié le passage à la limite, mais la remarque valait surtout pour l'intuitivité du résultat.

*Augmentation du degré du dénominateur*

Plus fort !

Le degré du dénominateur, hormis le  $z$ , est de  $4$  avec le  $z^4 + 4$ . Eh bien, on peut l'augmenter pour faire converger la suite plus vite.

Considérons ainsi la fonction :

$$g^{2j}(z) = \frac{8\pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) z \prod_{k=0}^j (z^4 + 4(2k+1)^4)}$$

Calculons les résidus :

Pôles	Résidus
$0$	$\frac{8\pi}{\prod_{k=0}^j 4(2k+1)^4}$
$(2n+1)$	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j ((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$
somme des résidus des racines	$0$

On obtient alors la série :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = 4 \prod_{k=0}^j (4(2k+1)^4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j ((2n+1)^4 + 4(2k+1)^4)}$$

On peut s'intéresser au cas limite lorsque  $j$  tend vers l'infini, cela revient à calculer le produit infini :

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{(2n+1)^4}{4(2k+1)^4} \right)$$

On peut partir pour cela de l'expression bien connue (voir par exemple l'[encyclopédie](#) d'Eric Weisstein) :

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2} \right)$$

Cela est tout à fait intuitif, puisque le produit infini s'annule dès que  $z$  prend une valeur impaire, donc c'est une fonction  $(2n+1)$  périodique, cela doit être le cosinus... On a donc :

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{(2n+1)^4}{4(2k+1)^4} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{i(2n+1)^2}{2(2k+1)^2} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{i(2n+1)^2}{2(2k+1)^2} \right) = \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 + \frac{(1+i)^2(2n+1)^2}{2^2(2k+1)^2} \right) \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{(1+i)^2(2n+1)^2}{2^2(2k+1)^2} \right)$$

$$= \cos \left( \frac{i(1+i)(2n+1)\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{(1+i)(2n+1)\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( \cos \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) + \cos \left( \frac{i(2n+1)\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left( 0 + \cosh \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right) \right)$$

et finalement :

$$\pi = 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cosh \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)}$$

Bien évidemment, cela n'a plus guère d'intérêt pour le calcul des décimales et là encore la rigueur est un peu oubliée, mais la formule est assez esthétique, n'est-ce pas ?

A noter que je pense que l'on peut la rapprocher des identités sur la fonction  $\zeta$  de Riemann trouvées par Simon [Plouffe](#) et les [Borwein](#) en 1997/1998 (voir sa [page](#) perso). Une identité utilisée est en effet la somme

$$\frac{7\pi^3}{180} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3 \tanh(n\pi)}$$

La démonstration en est donnée sur la page de ce site consacrée à [Plouffe](#) et d'autres formules du même type s'y trouvent.

## Alors, pourquoi ça marche et comment continuer ?

Le point majeur à étudier est celui de la forme des racines  $m$ -ièmes de  $p$ . On a vu que l'annulation de la somme des résidus pour ces racines dépend de la transformation du *cosinus* en *sin* à cause du fait que *sin* est impaire. Comme l'on part d'un cosinus, il faut donc qu'il y ait une translation de  $\pm (2k+1) \frac{\pi}{2}$  car  $\cos(x \pm (2k+1) \frac{\pi}{2}) = \pm \sin(x)$ .

Dans l'exemple précédent, comme l'on part de  $\cos(\pi z/2)$ , il suffit que lors du calcul des résidus, la racine  $m$ -ième de  $p$  ait une partie réelle de la forme  $(2k+1)$ , donc entière et impaire. C'était bien le cas précédemment pour  $m=4$  et  $p=4$  puisque les racines sont les  $\pm 1 \pm i$ .

Cette propriété dépend essentiellement du degré de la puissance  $m$  au travers de la forme des racines  $m$ -ièmes de l'unité.

Pour trouver les racines de  $z^m + p$ , il suffit en effet simplement de multiplier les racines  $m$ -ièmes de l'unité par  $p^{1/m}$ . Si on note  $a_k$  la partie réelle de la  $k$ -ième racine  $m$ -ième de l'unité, une condition suffisante pour que cela marche est donc qu'il existe  $p$  entier tel que

$$a_k \cdot p^{1/m} = (2k+1)$$

et que cela soit valable pour toutes les racines avec le même  $p$ .

On le verra par la suite, seuls  $m=2$ ,  $m=3$ ,  $m=4$  et  $m=6$  semblent convenir, car au dessus du degré 6, par exemple pour le degré 8 qui semble favorable, on trouve un  $p$  pour 4 racines et un autre  $p$  pour les 4 autres racines, et plus rien ne marche, il y a constamment un décalage de  $2^{1/2}$  ! Notons aussi que, pour profiter d'un entier solution, on s'intéressera



parfois en pratique plutôt à  $z^m +/-q^m$ .

## Et la généralisation - pourquoi ça marche ?

Lorsque le degré  $m$  marche et que l'on a trouvé  $p$ , rien n'empêche ensuite de multiplier  $p$  par  $(2k+1)^m$ , on sait que l'on multiplie alors les racines  $m$ -ièmes de  $p$  par  $(2k+1)$ , mais puisque leur partie réelle est impaire et que le produit de deux impairs est impair, les nouvelles racines ont encore la bonne propriété sur leur partie réelle. Cela explique pourquoi la généralisation de l'exemple préliminaire fonctionne.

Il n'est pas interdit aussi de disposer au dénominateur autant de polynômes de la forme  $z^m + p(2k+1)^m$  que l'on veut. Cela crée des produits qui augmentent le degré du dénominateur et aboutissent à des cas limites comme on l'a vu.

Voilà en bref le principe d'exploration, il n'est pas impossible que des cas particuliers ne rentrant pas dans les hypothèses ci-dessus apparaissent, mais aucun n'a encore montré le bout de son nez. Tous les exemples suivants sont donc des variantes de ce principe. Voici les diverses pistes qui ont été envisagées :

### Piste 1 : utilisation du $\cos$ , de $z$ et d'un autre polynôme de degré $m : z^m + p, m > 1$ soit

$$g(z) = \frac{8\pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) z(z^m + p)}$$

\*\*\* Cas  $m=4$  et  $p=4$

Celui-là, on l'a donc vu comme exemple préliminaire

\*\*\* Cas  $m=2$

\*  $p=-4(2k+1)^2, p=-4(2k)^2, p=-4(6k+/-1)^2/3$

$m=2$  est un cas un peu particulier, la simplicité des racines nous permet d'étudier le cas général en laissant initialement  $p$  comme paramètre dans  $g$ . On va retrouver ainsi naturellement les valeurs de  $p$  choisies ci-dessus :

Voici donc le tableau rituel :

Pôles	Résidus
0	$\frac{8\pi}{p}$
$(2n+1)$	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 + p)}$
somme des résidus des racines	$\frac{-8\pi}{\cos\left(\frac{i\pi\sqrt{p}}{2}\right)p}$

Le  $i$  dans le *cosinus* est très gênant si l'on veut une relation agréable et ne pas tomber sur des *cosh* du plus mauvais effet. Il suffit pour l'enlever de prendre  $p$  négatif, un autre  $i$  sortira de la racine. Bien, ensuite, il s'agit de ne pas annuler le *cosinus* au dénominateur, il faut donc qu'il y ait un facteur 4 sous la racine pour tomber sur des *cosinus* de multiples de  $\pi$  dont on connaît bien la valeur.

Finalement, on peut prendre pour valeur de  $p$  soit  $-4(2k+1)^2$  soit  $-4(2k)^2$ . Et ce choix est loin d'être anodin, voyons plutôt :

Avec  $p=-4(2k+1)^2$ , on obtient pour  $k$  entier, toujours en annulant la somme des résidus ci-dessus :

$$\pi = -8(2k+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \left[ (2n+1)^2 - 4(2k+1)^2 \right]}$$

Mais avec  $p=-4(2k)^2$ , surprise, on obtient :

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \left[ (2n+1)^2 - 4(2k)^2 \right]}$$

car le résidu en 0 s'annule avec ceux des racines puisque  $\cos(2k\pi)=1$ .

Donc selon que l'on choisit les impairs  $2k+1$  ou les pairs  $2k$ , on a une somme égale à  $\pi$  ou nulle, voilà un phénomène intéressant !

En fait, plus généralement, si l'on choisit  $p=-4a^2$ , on obtient d'après le tableau des résidus le joli résultat suivant, qui explique cette curiosité :

$$\frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{\cos(a\pi)} \right) = -8a^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \left[ (2n+1)^2 - 4a^2 \right]}$$

La seule autre valeur rationnelle pour le cosinus concerne la valeur  $a=(6k\pm 1)/3$ , ce qui donne la nouvelle série :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{8}{9} (6k \pm 1)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \left[ (2n+1)^2 - \frac{4(6k \pm 1)^2}{9} \right]}$$

*Augmentation du degré du dénominateur*

cela donne :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = -2 \prod_{k=0}^j \left( 4(2k+1)^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j \left[ (2n+1)^2 - 4(2k+1)^2 \right]}$$

et pour le cas limite en faisant tendre  $j$  vers l'infini :

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{n+3}{2}}{(2n+1)}$$

Cette dernière série est déjà citée d'après C. Fréteigny dans Gradshteyn, I.S. and Ryzhik, I.M. " *Tables of Integrals, Series, and Products* " San Diego, CA: Academic Press, 1996 (en version CD)

Je n'ai malheureusement pas ce livre ni le CD, mais je sens qu'ils me plairaient !

Il n'y a pas de cas limite pour la deuxième série nulle, on tombe sur la somme des  $(-1)^n$  dont le résultat, si il est normalement indéterminable, correspond intuitivement bien à la valeur 0 de la série initiale.

On peut augmenter le degré du dénominateur de façon plus exotique. Comme l'on a trouvé une série de somme nulle, on peut la soustraire de la série donnant  $Pi$  pour trouver une nouvelle série (bricolage !). Ainsi, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \pi = 32(2k+1)^2(4k+3) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - 4(2k+2)^2)((2n+1)^2 - 4(2k+1)^2)}$$

\*  $p = -(2k+1)^2$

Il y a cet autre cas intéressant pour  $m=2$ . Il correspond au cas où l'on sait que le dénominateur va s'annuler pour la valeur  $n=k$  puisque l'on va avoir  $(2n+1)^2 - (2k+1)^2$  dans la série. L'ordre des pôles en  $z = \pm(2k+1)$  n'est alors plus 1. Mais il suffit de calculer les résidus en ces valeurs avec la formule différentielle proposée dans la section "Théorème des résidus", et les résidus pour les autres valeurs  $2n+1$  de façon classique, cela donne :

Pôles	Résidus
0	$\frac{-8\pi}{(2k+1)^2}$
$(2n+1) (n \neq k)$	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - (2k+1)^2)}$
$\pm(2k+1)$	$\frac{12(-1)^k}{(2k+1)^3}$

En annulant la somme de ces résidus, on peut alors écrire pour tout  $k$  entier :

$$\pi = \frac{3(-1)^k}{(2k+1)} - 2(2k+1)^2 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k \\ n \neq -k-1}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^2 - (2k+1)^2)}$$

La généralisation par l'augmentation de degré au dénominateur semble plus complexe tout simplement parce que cela

oblige à retirer d'autres valeurs de  $n$  de la série. On voit en tous les cas qu'il n'existe pas de cas limite (car il ne resterait plus de valeurs de  $n$  dans la série !!)

\*\*\* Cas  $m=3$  et  $p=2^3$

Un cas très classique, parfaitement ressemblant au cas  $m=4$ , et facilement généralisable, c'est d'ailleurs par là que l'on va commencer puisque le cas  $p=8$  correspond à  $k=0$  dans la généralisation :

Rappelons la fonction utilisée pour cette généralisation :

$$g^{E1}(z) = \frac{8\pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) z \left( z^3 + 8(2k+1)^3 \right)}$$

Voici le tableau des pôles/résidus :

Pôles	Résidus
0	$\frac{\pi}{(2k+1)^3}$
$(2n+1)$	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^3 + 8(2k+1)^3)}$
$-2-4k$ (1ère racine)	$\frac{\pi}{3(2k+1)^3}$
$1+2k \pm i(2k+1)^{1/2}$ (la somme des résidus s'annule)	$\pm \frac{\pi(-1)^k}{3 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}(2k+1)\right) (2k+1)^3}$

On le voit, la seule particularité de ce cas est d'avoir une première racine indépendante des autres (à cause du degré 3), mais son résidu est parfaitement utilisable, et l'on peut former la somme (qui était assez prévisible !) :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = 12(2k+1)^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^3 + 8(2k+1)^3)}$$

Une petite variante tout de même, la somme se fait cette fois-ci sur  $\mathbb{Z}$ , toujours à cause du degré 3, la somme sur  $\mathbb{N}$  n'étant plus égale à la somme sur  $\mathbb{Z}^-$ . Je pense que c'est aussi pour cela qu'il ne suffit plus de faire tendre  $k$  vers l'infini pour retrouver la suite de [Leibniz](#) comme tout à l'heure pour le cas  $m=2$ .

Cependant, si l'on combine les sommes sur  $\mathbb{Z}^-$  et  $\mathbb{Z}^+$ , on arrive tout de même à obtenir une série sur  $\mathbb{N}$  qui est exactement celle présentée dans la section suivante "Cas  $m=6$  et  $p=2^6$ "

*Augmentation du degré du dénominateur*

Le principe est connu maintenant, évitons de charger inutilement cette page déjà très longue. On peut sans peine

appliquer le même processus que pour  $m=2$  ou  $m=4$ , on obtient pour tout  $j$  entier :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = 12 \prod_{k=0}^j \left( 2(2k+1)^3 \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j \left( (2n+1)^3 + 8(2k+1)^3 \right)}$$

Le cas limite ne semble pas calculable aisément à cause du produit infini (est-il seulement calculable ?), si quelqu'un a un résultat... Tout ce que l'on peut dire est que c'est une fonction  $(2n+1)$  périodique sur  $\mathbb{R}^+$  et non sur  $\mathbb{R}^-$ . Cela rappelle un peu les problèmes concernant la somme des inverses des puissances impaires, c'est à dire la fonction zêta pour les valeurs impaires.

\*\*\* Cas  $m=6$  et  $p=-2^6$

Dernière valeur apparemment possible, ce cas ne pose pas de difficultés particulières théoriques. Les racines au degré 6 sont :

$\pm(2+4k)$  qui donnent comme au degré 3 un multiple de  $\pi i$

$\pm(2+4k)\{j, j^2\}$  qui ont une partie réelle impaire, donc le *cosinus* se transforme comme d'habitude en sin et les résidus des racines conjuguées s'annulent.

On passe donc vite, pour filer sur le tableau des pôles/résidus et sur les résultats :

Pôles	Résidus
0	$-\frac{\pi}{8(2k+1)^6}$
$(2n+1)$	$-\frac{16(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^6 - 64(2k+1)^6)}$
somme des résidus des racines	0

Cela donne :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = -3 \cdot 2^6 (2k+1)^6 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)((2n+1)^6 - 2^6(2k+1)^6)}$$

*Augmentation du degré du dénominateur*

Pas de problèmes non plus ici, on obtient facilement :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = -3 \prod_{k=0}^j \left( 2(2k+1)^6 \right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \prod_{k=0}^j \left( (2n+1)^6 - 2^6(2k+1)^6 \right)}$$

Pour le cas limite, on utilise le même procédé que pour  $m=4$ , à savoir l'utilisation du produit infini de degré 2 valant  $\cos(\pi z/2)$ . La lourdeur des calculs et la taille (déjà conséquente !) de cette page faisant, on va éviter de détailler le calcul. Pour obtenir le produit infini de degré 6, on va multiplier trois fois ce produit infini de degré 2 valant  $\cos$ , avec  $z=(n+1/2)$ ,  $z=j.(n+1/2)$  et  $z=j^2(n+1/2)$ . On trouve alors :

$$\pi = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} I\right)\right) \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{4} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} I\right)\right)}$$

Les  $I$  vont donner des cosh en développant, (mais ce n'est pas très beau, mieux vaut laisser sous forme compacte) ce qui va assurer une convergence rapide.

**Piste 2 : utilisation du  $\sin$ , et d'un autre polynôme de degré  $m : z^m + p, m > 1$  :**

Comme on a obtenu des séries "impaires" avec le *cosinus*, c'est à dire avec un  $(2n+1)$  au dénominateur du terme général de la série, on pourrait s'attendre à obtenir des séries paires avec le *sinus*. Mais malheureusement, tout ne marche pas aussi bien...

En effet, contrairement au cas  $(2n+1)$ ,  $0$  est un cas particulier de  $2n$ , et le résidu en  $0$  est alors plus difficile à calculer, il est en fait nul, mince,  $\pi$  n'apparaît plus...

Il faut recourir à une astuce, et décaler le  $z$  du dénominateur en  $z-1$ , c'est à dire considérer la fonction

$$g_2(z) = \frac{8\pi}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z-1)(z^m + p)}$$

Le  $1$  est choisi pour obtenir une valeur agréable du *sinus*, mais l'on pourrait partir d'un autre décalage, pourvu qu'il ne soit pas de la forme  $2n$ .

Tout cela est bien joli, mais avec l'habitude de cette méthode, on voit immédiatement que ce décalage va ruiner nos espoirs de trouver des séries paires avec cette piste puisque l'on aura au dénominateur une chose de la forme  $q.n-a$ . Terrible...

**\*\*\* Cas  $m=4$  et  $p=4$**

Un gros problème avec ce cas, le décalage empêche la somme des résidus des racines de s'annuler totalement et l'on voit apparaître des *cosh* du plus mauvais effet...

Voyons ainsi le tableau des pôles/résidus :

Pôles	Résidus
$1$	$\frac{8\pi}{5}$
$2n$	$-\frac{4(-1)^n}{(2n-1)(4n^4+1)}$
somme des résidus des racines $\pm 1 \pm i$	$\frac{-2\pi}{5 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

Ce qui donne la série :

$$\frac{8\pi}{5} - \frac{2\pi}{5 \cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 4 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(4n^4+1)}$$

Il faut absolument se débarrasser du terme en  $\cosh$ , sinon, la série n'a pas vraiment d'intérêt...

Une solution est d'écrire ce terme sous forme d'une série par la même méthode des résidus, puis de rassembler les deux séries.

Ainsi, on considère :

$$g_2(z) = \frac{8\pi}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)(z^4+4)}$$

Avec la méthode habituelle, les résidus en  $2n$  et la somme de ceux-ci pour les racines donnent la série :

$$\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^4+1}$$

Au passage, notez l'extraordinaire pureté de la série à droite, d'une simplicité exceptionnelle, et l'horreur du terme de gauche ! La forme du membre de gauche aurait-elle des propriétés si remarquables pour être égal à ce genre de série ?

Toujours est-il qu'en regroupant les deux équations précédentes, on trouve :

$$\pi = 3 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n^2-3)}{(4n^4+1)(4n^2-1)}$$

Encore une jolie série, mais peut-on en tirer un résultat encore plus satisfaisant ?

### Généralisation

Comment la généraliser ? Pas de la manière habituelle avec les  $(2k+1)$ , on va tenter d'être plus précis en introduisant la fonction :

$$g_2^{g^1}(z) = \frac{\pi(a z^2 + b)}{2 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) (z^4 + 4)(z^2 - c)}$$

Nous allons chercher la condition sur  $a$ ,  $b$ , et  $c$  pour que la somme des résidus des racines de  $z^4 + 4$  s'annule.

Pour cela, voyons le calcul des résidus en  $z=1+/-i$  (en n'oubliant pas que  $z^2 = +/-2i$  et  $z^4 = -4$ )

$$\operatorname{Res}(g_2^{g^1}, z) = \frac{z}{z} \frac{\pi(\pm 2ai + b)}{2 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) 4z^3 (\pm 2i - c)} = -\frac{z}{16} \frac{\pi(\pm 2ai + b)(\pm 2i - c)}{2 \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) (c^2 + 4)}$$

Bon, on sait que  $z^2 = +/-2i$  donc, pour que la somme de ces deux résidus s'annule, il suffit d'utiliser cette propriété et que le terme derrière le  $z$  au numérateur soit donc proportionnel à  $z$ , c'est à dire :

$$(+/-2a.i+b)(+/-2i-c) = 4a-b.c +/-2i(a.c+b) = 1 +/- i \Leftrightarrow 4a - b.c = 2(a.c + b) \Leftrightarrow \frac{2a}{b} = \frac{c-2}{c+2}$$

La série considérée précédemment correspond à  $a=1$ ,  $b=-6$  et  $c=1$

La somme des deux autres résidus s'annule car le carré des racines est réel ( $+/-2$ ).

Intéressons-nous maintenant aux autres pôles, et sommons par le théorème des résidus comme d'habitude. Pour  $2n$ , calcul classique que je n'expose pas.

Comme la somme des résidus pour les racines de  $z^2 - c$  donne  $\frac{8\pi(a.c + b)}{\sin\left(\frac{\pi\sqrt{c}}{2}\right)\sqrt{c}(c^2 + 4)}$ , on a tout intérêt à choisir

$c=(2k+1)^2$  pour que le *sinus* soit égal à 1, ce qui donne après de nombreuses simplifications (ouf !):

$$\forall k \in \mathbb{N}, \pi = (2k+1) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n \left( (2(2k+1)^2 - 4)n^2 + (2k+1)^2 + 2 \right)}{(4n^2 + 1)(4n^2 - (2k+1)^2)}$$

La formule originelle est le cas  $k=0$ .

Pour autant qu'elle marche, cette méthode n'est pas vraiment faite pour les généralisations et dépend surtout des propriétés de la fonction. Ici, le degré 4 est idéal car les racines  $1+/-i$  ont pour carré  $+/-2i$ , ce qui permet l'annulation des résidus des racines conjuguées de  $z^4 + 4$ .

Les degrés 2, 3 et 8 ne m'ont pas semblé favorables, mais il y a donc certainement beaucoup encore à fouiller de ce côté-ci !

**Piste 3 : utilisation de *tan* et d'un autre polynôme de degré  $m$  :  $z^m + p$ ,  $m > 1$**

Intuitivement, la dérivée de *tan* :  $(1 + \tan^2)$  fait penser que l'on peut obtenir des séries non alternées, contrairement aux *sinus* et aux *cosinus*. Car le  $(-1)^n$  venait de l'expression de la dérivée de *cos* et *sin* en  $(2n+1)$  ou  $(2n)$ . L'utilisation de la *tangente* est tout à fait similaire à celle du *sinus*, car leurs comportements sont équivalents à l'origine (notamment les pôles sont les mêmes). Dès lors, on va être confronté au même problème que pour le *sinus*, et l'on va devoir décaler  $z$



en  $z=1/2$  cette fois-ci (pour  $\tan(\pi/4)=1$ ) pour éviter d'avoir un résidu nul en 0.

\*\*\* Cas  $m=4$  et  $p=4$

De même que pour le sinus, c'est le degré 4 qui semble marcher le mieux pour les mêmes raisons. Passons donc vite et courons vers les résultats !

En considérant :

$$g_3(z) = \frac{8\pi}{\tan\left(\frac{\pi z}{2}\right)\left(z - \frac{1}{2}\right)(z^4 + 4)}$$

on obtient le tableau des pôles/résidus suivant :

Pôles	Résidus
$1/2$	$\frac{128\pi}{65}$
$2n$	$\frac{8}{(4n^4 + 1)(4n - 1)}$
somme des résidus des racines $+/-1 +/-i$	$\frac{36\pi}{65 \cot \operatorname{anh}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

et la série :

$$\frac{128\pi}{65} + \frac{36\pi}{65 \cot \operatorname{anh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -8 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(4n^4 + 1)(4n - 1)}$$

Ensuite, l'étude de la même fonction  $g_3$  sans le  $z=1/2$  conduit à la jolie expression :

$$\frac{\pi}{\cot \operatorname{anh}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^4 + 1}$$

ce qui, injecté dans la série précédente, donne :

$$\pi = -\frac{1}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{9n + 14}{(4n - 1)(4n^4 + 1)}$$

Je n'ai pas encore réussi à généraliser le résultat... et je n'ai pas essayé avec d'autres degrés que 4. Avis aux amateurs ! Notez que par rapport aux séries habituelles, on a cette fois-ci  $4n-1$  au lieu de  $2n +/- 1$ . Cette recherche d'autres  $a*n +/- 1$  sera l'objet de la piste 6.

**Piste 4 : utilisation de  $z^q$  et d'un autre polynôme de degré  $m : z^m + p, m > 1$  :**

**\*\*\* Sans polynôme  $z^m + p$**

On considèrera tout d'abord les fonctions sans polynôme de degré  $m$ , c'est à dire du type : 
$$g_q(z) = \frac{8\pi}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) z^q}$$
 ou

encore avec le *cosinus* ou la *tangente*.

Ces fonctions servent à redémontrer les innombrables formules d'[Euler/Bernoulli](#). On calculera les résidus en  $0$  avec la formule différentielle de la section "Théorème des résidus" pour un pôle d'ordre  $m$ .

Une chose à remarquer simplement est que la somme sur  $Z$  (privé de  $0$  lorsqu'il le faut, bien sûr) des inverses des puissances est nulle pour certaines puissances à cause de la parité. Ainsi, c'est ce qui explique que pour le *sinus* et  $q=2$ ,

le résidu en  $0$  n'est pas nul et vaut  $\frac{2\pi^2}{3}$  alors qu'il l'est pour  $q=3$ . En effet, on a 
$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$$
. Et donc - maintenant

que l'on est habitué, on peut même se passer du tableau des pôles/résidus -  $q=2$  donne :

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Plus généralement, pour le sinus, on peut utiliser les puissances  $q=2k$  pour donner des séries du type de la précédente. La tangente utilise aussi  $q=2k$  et donne les séries non alternées.

Pour le cosinus, c'est évidemment le même phénomène décalé puisque  $0$  n'est pas un pôle du cosinus. On doit donc utiliser  $q=2k+1$  pour trouver la somme des inverses des puissances des impairs. Ainsi,  $q=3$  donne :

$$\pi^3 = 16 \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$$

Ce qui est rageant, c'est que le phénomène  $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$  est la raison pour laquelle on ne peut pas calculer avec cette

méthode la valeur de  $\zeta(3)$ , la constante d'Apéry. Et cela est valable pour toutes les puissances impaires, sauf pour les séries alternées comme ci-dessus, malheureusement, on ne peut pas passer d'une série alternée à une non alternée avec les impairs contrairement aux pairs. L'un des plus importants problèmes mathématiques contemporains tient à peu de choses tout de même...

**\*\*\* Avec polynôme  $z^m + p$**

Malheureusement, tout marche beaucoup moins bien ici que lorsque  $q=1$  ( $z$  seulement). La somme des résidus des racines ne s'annule plus par exemple dans le si joli cas  $m=4$  et  $p=4$  même avec le cosinus. On obtient une variété hyperbolique genre *cosh/sinh* et il faut user encore de l'astuce comme pour les *sinus*, c'est à dire utiliser une expression de *cosh/sinh* pour la remplacer dans la série.

Mais un autre problème arrive : cette expression, par exemple  $\frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^4 + 1}$  ne converge pas aussi vite

que celle que l'on a obtenue dans la série car on y fait varier la puissance de  $(2n+1)^q$ , expression absente dans la série avec  $\cosh$ . Et donc impossible de s'en sortir pour obtenir un gain de vitesse grâce au  $(2n+1)^q$ . Par exemple, en considérant pour  $q=2$ ,  $m=4$  et  $p=4$  et le *sinus* :

$\xi_q(z) = \frac{8\pi}{\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) z^2 (z^4 + 4)}$  on obtient l'expression :

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 (4n^4 + 1)}$$

et l'expression de *cosh* au dessus permet d'obtenir la série :

$$\frac{\pi^2}{6} = 2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^4 + 1)} \left( \frac{2n^2 - 1}{n^2} \right)$$

Mais ce n'est guère réjouissant, et semble difficile à généraliser.

Pour certaines puissances  $q$ , on arrive à annuler la somme des résidus des racines de  $z^4 + 4$  (pour le *cosinus* et  $q=5$  par exemple) mais comme décidément ça ne veut pas marcher, le résidu en 0 est  $1/192 * \pi(5\pi^4 - 96)$  et on ne peut isoler  $\pi$  dans cette expression car le polynôme correspondant  $1/192 * x(5x^4 - 96) = c$  n'a pas de racines exprimables sous la forme de radicaux...

Pour le degré  $q=2$ , on a un peu le même problème dans la mesure où l'on obtient la série dans un polynôme du second degré de variable  $\pi$ . Mais si l'on isole  $\pi$ , des racines carrées arrivent or, l'objectif premier était de rester dans les séries rationnelles, donc également sans racines. Avoir une série de somme  $\pi^2$  comme au dessus passe encore, mais si l'on commence à introduire des racines, cette page aura une longueur tendant franchement vers l'infini ! Je donne donc seulement un exemple de ce que l'on peut obtenir :

$q=2$ ,  $m=2$ ,  $p=(2k+1)^2$  donne :

$$\frac{\pi^2}{3(2k+1)^2} - 4 \frac{\pi}{(2k+1)^3} + \frac{8}{(2k+1)^4} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 (4n^2 - (2k+1)^2)} = 0$$

Donc, on en reste là avec cette piste qui semble un peu bloquée si l'on s'en tient à l'optique originelle.

## Piste 5 : utilisation de pôles décalés pour les polynômes

Cette méthode est très riche pour obtenir de jolies formules généralisées. Elle consiste à prendre au lieu du  $z$  un  $z-a$  systématiquement, étant entendu que l'on peut rajouter ensuite plusieurs autres polynômes au dénominateur. Pour la

rapidité du chargement de la page (mais quelqu'un sera-t-il seulement parvenu jusque là ??), j'ometts les détails du calcul, lorsqu'il est très classique.

Exemple 1 : deux pôles simples décalés

L'étude de  $\xi_{5.1}(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)(z-a)(z-b)}$  donne :

$$\frac{\pi}{a-b} \left( \frac{1}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{\sin(\pi b)} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-a)(n-b)}$$

Et en faisant tendre  $a$  vers  $b$ , puis  $b$  vers 0, on retrouve bien la série d'Euler  $\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$  (encore heureux !)

Les  $\tan$  et  $\cos$  (pris en  $\pi z/2$ ) donnent exactement le même type de formule avec les caractéristiques de chacun :  $\tan$  à la place du  $\sin$  et série non alternée pour la  $\tan$ , et  $\cos$  à la place de  $\sin$  et  $2n+1$  à la place de  $n$  pour le  $\cosinus$

Le résultat est assez facilement généralisable pour  $j+1$  pôles distincts au dénominateur et cela donne :

$$\pi \sum_{k=0}^j \frac{1}{\sin(\pi a_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^j (a_k - a_i)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^j (n - a_k)}$$

Malheureusement, comme les seules valeurs rationnelles pour le  $\sinus$  sont prises pour des  $a_k$  rationnels en  $\pi/3$  et  $\pi/2$ , dans le cadre de l'étude, on ne peut avoir plus de deux termes dans le produit et donc aller au delà de  $j=1$ .

Exemple 2 : un pôle d'ordre  $q$  décalé

On va prendre  $q=3$  ici, car il n'existe pas semble-t-il de cas vraiment général, les calculs dépendent de la puissance

utilisée. Considérons ainsi la fonction  $\xi_{5.2}(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)(z-m)^3}$ . L'application de la méthode des résidus donne :

$$\pi^3 = 2 \frac{\sin(\pi m)^3}{1 + \cos(\pi m)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-m)^3}$$

si je ne me suis pas trompé. Les cas  $m=1/3$  ou  $m=1/2$  semblent les plus intéressants (et ce sont visiblement les seuls) si l'on veut obtenir une expression sans terme irrationnel (hormis  $\pi$  bien sûr !).

On peut aussi choisir  $\tan$  à la place de  $\sin$ . On obtient :

$$\pi^3 = - \frac{\sin(\pi m)^3}{\cos(\pi m)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-m)^3}$$

## Piste 6 : utilisation d'un polynôme $z^m + p$ , et recherche de coefficients $a.n+/-1$ au dénominateur de la série

Cette piste a été effleurée à la fin de la piste 3. Deux méthodes sont utilisables pour y arriver :

\* soit l'on utilise un décalage général ( $z+/-b$ ) et l'on regarde ensuite quelles valeurs de  $b$  (de la forme  $1/r$ ) permettent de changer le  $2n+/-b$  en  $2r.n+1$ .

\* soit l'on part d'un décalage à l'intérieur du  $\cos/\sin$  c'est à dire  $c.\pi.z + \pi d$ , de façon à ce que les pôles soient directement de la forme  $a.n+1$ .

Les deux cas sont clairement équivalents car ils correspondent à un décalage tous les deux, le second est plus pratique pour trouver ce qui marche et former les séries.

Donc, si l'on se penche sur la seconde méthode, et que l'on se base toujours sur l'annulation des résidus des pôles de  $z^m + p$ , fixons les notations, et recherchons  $a.n+1$  au dénominateur avec  $\cos(b.\pi.z + c.\pi)$  c'est à dire la fonction

$$g_{a,1}(z) = \frac{\pi}{\cos(b.\pi.z + c.\pi)z(z^m + p)}$$

Voyons les contraintes :

1. Comme on a  $z$  au dénominateur,  $0$  est un pôle et il faut donc que le résidu en ce pôle, c'est à dire en fait  $\cos(c.\pi)$  soit rationnel (pas de problème pour la rationalité de  $p$  !). Cela donne la condition (1) :

$$c = 0, c = \pm \frac{1}{3} \text{ ou } c = \pm \frac{2}{3} \quad (1)$$

On exclut le cas  $c=1/2$  qui donne un pôle de  $\cosinus$  (pas pratique !)

2.  $a.n+1$  doit être un pôle, donc  $b.\pi.(a.n+1) + c.\pi = (2n+1)\pi/2$  ce qui est équivalent à la condition (2) :

$$a.b=1 \quad (2a)$$

$$b+c=1/2 \quad (2b)$$

3. Enfin, pour qu'il y ait transformation du  $\cosinus$  en  $\sinus$ , la partie réelle  $z_1$  de  $z$  se doit de vérifier la condition (3) valable pour les généralisations :

$$b.z_1.\pi + c.\pi = k.\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b.z_1 + c = (2k+1)\frac{1}{2} \quad (3)$$

Réolvons ce système en utilisant les différentes valeurs possibles de  $c$  :

A noter que  $c=0$  est le cas que l'on a étudié dans les pistes précédentes cela donne

$c$	$c=0$	$c=1/3$	$c=-1/3$	$c=2/3$	$c=-2/3$
$b$	$b=1/2$	$b=1/6$	$b=5/6$	$b=-1/6$	$b=7/6$
$a$	$a=2$	$a=6$	$a=6/5$	$a=-6$	$a=6/7$
$z_1$	$2k+1$	$6k+1$	$(6k+1)/5$	$1-6k$	$(6k+1)/7$
Valeurs de $a.n+1$ possibles	$2n+1$	$6n+1$	$6n+5 \sim 6n-1$	$1-6n \sim 6n-1$	$6n+7 \sim 6n+1$

Tout est clair à présent ! Encore une remarque tout de même, la forme de  $z_1$  oblige à considérer seulement un degré 2, voire 3. En effet, 4 racines ne peuvent avoir la même partie réelle. On verra pourtant qu'il existe un cas particulier pour le degré 4.

Mais restons pour l'instant dans l'application du tableau, après avoir débroussaillé, c'est assez facile.

Considérons ainsi l'exemple du degré 3 avec  $c=1/3$  et  $b=1/6$  (3<sup>e</sup> colonne du tableau) :

$$\xi_{\delta, z}(z) = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi z}{6} + \frac{\pi}{3}\right) z(z^3 + 8(6k+1)^3)} \text{ donne la série :}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = \frac{144}{5} (6k+1)^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)((6n+1)^3 + 8(6k+1)^3)}$$

Hélas, pas d'augmentation du degré du dénominateur à cause du degré 3, comme on l'avait vu à la piste 1...

Il existe sinon un cas particulier, le degré 4. La forme obligatoire de  $z_1$  vue ci-dessus empêche aux résidus des racines

4-ièmes conjuguées de  $z^4 + 4$  de s'annuler deux à deux. Mais la somme des quatre résidus est nulle ! Je ne crois pas que ce phénomène se retrouve à un degré supérieur, cela est dû à la symétrie parfaite des racines pour le degré 4, c'est dommage...

Toujours est-il qu'en considérant  $p=4*(6k+3)^4$ , et encore  $c=1/3$  et  $b=1/6$ , on obtient la série suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = 3.4.(6k+3)^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1)((6n+1)^4 + 4.(6k+3)^4)}$$

Et en augmentant le degré du dénominateur, on trouve :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = 3. \prod_{k=0}^j 4.(6k+3)^4 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1) \prod_{k=0}^j ((6n+1)^4 + 4.(6k+3)^4)}$$

Et comme cas limite, on a :

$$\pi = 6 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(6n+1) \left( \cosh\left(\frac{(6n+1)\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{(6n+1)\pi}{6}\right) \right)}$$

L'étude du sinus est équivalent à celle du cosinus par translation de  $\pi/2$ , donc, on ne trouvera pas de nouvelles séries par là.

Avec la tangente, la seule possibilité de *tangente* rationnelle non nulle est pour :

$\tan(\pi/4)=1$ . En suivant le même raisonnement que pour le *cosinus*, on trouve tout naturellement une série en  $4n+1$ , ici pour le degré 2, qui semble le seul possible :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \pi = -8(2k+1)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)((4n+1)^2 - 4(2k+1)^2)}$$

On peut augmenter le degré du dénominateur et obtenir :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \pi = -2 \prod_{k=0}^j 4(4k+1)^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1) \prod_{k=0}^j ((4n+1)^2 - 4(4k+1)^2)}$$

et le cas limite donne :

$$\pi = \frac{4}{3} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1) \cos\left(\frac{(4n+1)\pi}{3}\right)}$$

## D'autres pistes ?

Avec cette méthode, on voit que l'on peut redémontrer nombre de formules, et bien sûr, toutes ne sont pas là !

On peut chercher d'autres fonctions à mettre au dénominateur des fonctions  $g$ . Par exemple, on peut mettre l'*exponentielle* complexe à la place des *cosinus/sinus* etc... Seule problème, l'*exponentielle* ne s'annule pas, il faut donc la coupler avec un *cosinus*.

Plus généralement, on ne peut utiliser de fonctions qui ne sont pas définies correctement sur tout le domaine complexe.

Par exemple, on ne peut utiliser  $\cos(\pi \cdot \log)$  pour obtenir des séries à la Simon [Plouffe](#) car le *logarithme* n'est défini dans le domaine complexe que si l'on effectue une coupure (suppression d'une demi-droite issue de l'origine) dans le domaine de définition complexe. Sinon, on pourrait tourner autour et avoir deux valeurs différentes pour  $z$  et  $z \cdot \exp(2i\pi)$  ( $\log(z)$  et  $\log(z)+2i\pi$ ). Ce qui serait pour le moins gênant !

A part les polynômes, je n'ai pas d'autres idées d'application pour l'instant, faites m'en part si vous en avez !