Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

René Descartes
(1596 - 1650)

---

## La méthode originale des isopérimètres

$$\forall L \in \mathbb{R}^* \qquad r_0 = \frac{L}{8} \qquad r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^2 + \frac{r_0^2}{4^n}}}{2}$$

$$S_n = \frac{L}{2 r_n} \qquad S_n \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

## Tranches de vie

René Descartes est né à la Haye en Touraine précisément le *31 mars 1596* . Ce fut certainement le philosophe français le plus célèbre ! Mais il ne fut pas que cela... Après une licence de droit en *1616* , il choisit le métier des armes en Hollande puis chez le Duc de Bavière jusqu'en *1620* . Rentré en France en *1625* , il y rédige ses travaux philosophiques - fameux, mais ce n'est pas l'objet de ce site ! - et fait paraître des travaux scientifiques sur l'optique, l'astronomie, la biologie et surtout la géométrie. En *1631* , paraît ainsi *Géométrie* dans lequel il définit les cooordonnées cartésiennes d'un point. Notons au passage que c'est à Descartes que l'on doit l'habitude de représenter les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet *a,b,c,d...* et les inconnues par *x,y,z* . Il meurt en *1650* .

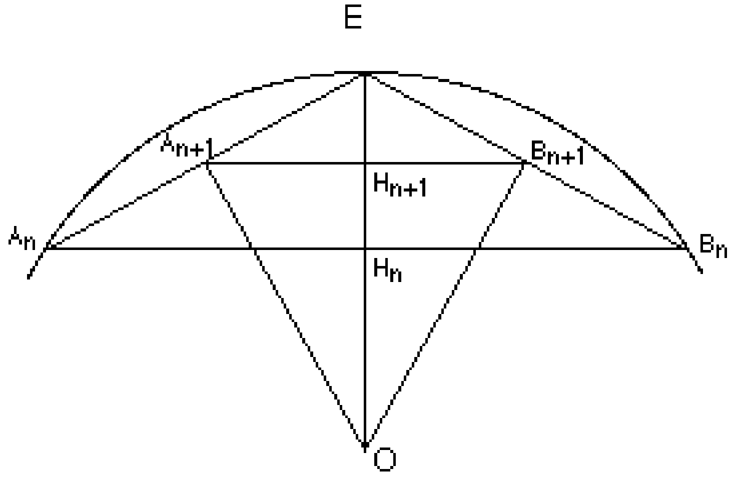
## Autour de $\pi$

Après son décès, on trouvera dans ses papiers la *méthode des isopérimètres* . Elle consiste à faire le contraire de la méthode d'Archimède c'est à dire à déterminer le rayon d'un cercle dont le périmètre est fixé à l'avance. C'est une construction entièrement géométrique...

## Démonstration

Ou plutôt construction, car ce n'est pas une réelle démonstration mathématique !
On considère une suite de polygones réguliers $P_0, P_1, P_2 \ldots P_n$ respectivement $2^2, 2^3, \ldots, 2^{n+2}$ côtés ayant, - c'est important - un même périmètre $L$

On considère la figure suivante, avec $A_n B_n = C_n$ et $OH_n = r_n$.




Cherchons une relation de récurrence entre $r_{n+1}$ et $r_n$ étant donné que $r_n$ tend vers le rayon du cercle.
On sait que $2^{n+2} C_n = L$ car $L$ est le périmètre du polygone $P_n$ de côté $C_n$. Cette relation étant valable pour tout $n \in N$, on a aussi $2^2 C_0 = L$.
Pour $P_0$, on a un carré donc $OH_0 = C_0/2 = r_0$, donc $r_0 = C_0/2 = L/(2.2^2) = L/8$
Soit $E$ le milieu du petit arc $A_n B_n$. Le segment qui joint les milieux $A_{n+1}$ et $B_{n+1}$ de $[EA_n]$ et $[EB_n]$ est le côté de $P_{n+1}$. Toute l'histoire va être géométrique, alors concentrons-nous !

On a $A_{n+1} B_{n+1} = C_{n+1} = L/2^{n+3}$ : en effet, par le théorème de ce cher Thalès,

$$\frac{EA_{n+1}}{EA_n} = \frac{A_{n+1}B_{n+1}}{A_nB_n} \quad or \quad \frac{EA_{n+1}}{EA_n} = \frac{1}{2} \quad donc \quad A_{n+1}B_{n+1} = \frac{1}{2}A_nB_n$$

Dans le triangle rectangle $OEA_{n+1}$ (car $OA_nE$ est isocèle), on a $A_{n+1}H_{n+1}^2 = EH_{n+1} * H_{n+1}O$
Mais montrons-le si ce n'est pas évident !
On a d'une part
$EO^2 = (EH_{n+1} + H_{n+1}O)^2 = EH_{n+1}^2 + 2EH_{n+1} * H_{n+1}O + H_{n+1}O^2$
donc $EH_{n+1} . H_{n+1}O = \frac{1}{2}EO^2 - \frac{1}{2}EH_{n+1}^2 - \frac{1}{2}H_{n+1}O^2$.
D'autre part, $A_{n+1}H_{n+1}^2 = A_{n+1}E^2 - EH_{n+1}^2$ par pythagore et $A_{n+1}H_{n+1}^2 = OA_{n+1}^2 - OH_{n+1}^2$, donc on a :

$$\begin{aligned} A_{n+1}H_{n+1}^2 &= \frac{1}{2}A_{n+1}E^2 - \frac{1}{2}EH_{n+1}^2 + \frac{1}{2}OA_{n+1}^2 - \frac{1}{2}OH_{n+1}^2 \\ &= EH_{n+1} . H_{n+1}O - \frac{1}{2}EO^2 + \frac{1}{2}A_{n+1}E^2 + \frac{1}{2}OA_{n+1}^2 \end{aligned}$$

or toujours par pythagore $EO^2 = A_{n+1}E^2 + OA_{n+1}^2$
donc $A_{n+1}H_{n+1}^2 = EH_{n+1} * H_{n+1}O$ (franchement désolé pour la lourdeur des notations !)

$$A_{n+1}H_{n+1}^{2} = \left(\frac{1}{2}A_{n+1}B_{n+1}\right)^{2} = \left(\frac{L}{2^{n+4}}\right)^{2} = \frac{L^{2}}{4^{n+4}} = \frac{64\,r_0^{2}}{4^{n+4}} = \frac{r_0^{2}}{4^{n+1}}$$

or

et $EH_{n+1} = H_{n+1}H_n$ (évident par Thalès !)
$= OH_{n+1} - OH_n = r_{n+1} - r_n$ et encore, $H_{n+1}O = r_{n+1}$
donc :

$$\frac{r_0^{2}}{4^{n+1}} = \left(r_{n+1} - r_n\right)r_{n+1}$$

Eh bien, la voilà, notre relation de récurrence !
C'est d'ailleurs un polynôme en $r_{n+1}$, qui est évidemment positif.
On extrait donc la seule racine positive du polynôme et on obtient :

$$r_{n+1} = \frac{r_n + \sqrt{r_n^{2} + \frac{r_0^{2}}{4^{n}}}}{2}$$

Lorsque $n$ augmente, le polygone $P_n$ tend à se confondre avec le cercle de périmètre $L=8r_0 = 2\pi r_n$ ($2\pi$*rayon... )
donc :

$$\frac{L}{2r_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Intéressant, non ?
Et pas si mauvais en termes d'efficacité !

# Essais

Regardons cela de plus près...
L'expression $\frac{r_0^{2}}{4^{n+1}} = \left(r_{n+1} - r_n\right)r_{n+1}$ fait penser à l'aire d'un rectangle de côtés $r_{n+1}$ et $r_{n+1} - r_n$. La suite géométrique des aires de ce rectangle serait donc de raison $1/4$. A priori, la relation entre $r_{n+1}$ et $r_n$ devrait elle aussi se comporter comme une suite géométrique, et la convergence devrait être linéaire ($-\mathrm{Log}(r_n) = a*n+b$)... Vérifions en prenant $L=8$, et donc $r_0 = 1$ (le choix de $L$ n'influe pas sur le résultat car la relation entre $r_{n+1}$ et $r_n$ est homogène en $L$) :

| | |
|---|---|
| *n=5* | *3,14 22 (2)* |
| *n=10* | *3,14159 32 (5)* |
| *n=50* | *28* décimales exactes |
| *n=100* | *60* décimales exactes |

Tout à fait, une bonne petite convergence *3n / 5* , voilà qui est fort honorable !

# Accélération de la convergence :

Ce qu'il y a de bien avec le *Delta2* d'Aitken, c'est qu'il y a toujours une accélération, si minime soit elle. Mais alors lorsqu'elle est gigantesque, quelle euphorie ! Regardons les essais :

| | Sans Aitken | Avec Aitken | Avec Aitken itéré |
|---|---|---|---|
| *n=5* | *3,14 22 (2)* | *3,14159 508 (5)* | *3,14159265 59 (8)* |
| *n=10* | *3,14159 32 (5)* | *3,1415926535 92 (10)* | *16* décimales exactes |
| *n=20* | *3,1415926535 903 (10)* | *23* décimales exactes | *35* décimales exactes |
| *n=50* | *28* décimales exactes | *59* décimales exactes | *90* décimales exactes |

C'est tout bonnement incroyable ! Aitken multiplie par plus de *2* la performance la suite qui atteint une convergence de *1.2n* .
Il me semble bien que c'est le meilleur résultat obtenu avec Aitken pour les suites convergeant vers *Pi* .
Et regardez les résultats avec Aitken itéré (on applique *2* fois le *Delta2* ) ! Vu la précision limite de mon calculateur (*100* décimales) et la sensibilité du *Delta2* , il est même possible que le résultat soit encore meilleur.
On atteint avec Aitken itéré une précision supérieure à *1.6n* et qui va en s'améliorant !

---

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr