Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Nicolas de Cues
(1401 - 1464)

Algorithme à retenir

$$a_1 = 0 \qquad b_1 = \frac{1}{4} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

$$\frac{1}{2a_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi \qquad \frac{1}{2b_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

Tranches de vie

Né en *1401* à Kues, Nikolaus Krebs est un théologien Allemand plus connu sous le nom francisé de Nicolas de Cues. Sa principale action fut de soutenir les papes et le principe de l'infaillibilité contre les conciles. Tout en touchant aux mathématiques, il laissa ainsi une importante oeuvre théologique et philosophique.
Il meurt en *1464* en laissant derrière lui une méthode d'approximation de *Pi* dans la lignée des suites d'origine Archimédienne.
Comme Leibniz et Descartes, ses réflexions théologiques et scientifiques sont souvent liées. Il considère ainsi que la recherche de la solution de la quadrature du cercle est comparable à la recherche de la vérité !

Autour de π

Comme je l'ai déja écrit dans l'histoire de la période géométrique de *Pi*, cette formule me pose problème. Elle est en effet souvent donnée comme la version "officielle" de la formule d'Archimède (*Le fascinant nombre Pi*), et pourtant je l'ai découverte sur un TD de maths en prépa intitulé "La méthode de Cues". Et dans *Le Petit Archimède* , cette formule est considérée comme celle de Grégory... Alors, je renouvelle mon appel, si quelqu'un connait la véritable paternité de cette suite, qu'il me la précise !
Notons toutefois que cette suite utilise le périmètre d'un polygone ayant une valeur fixe. On cherche alors à évaluer les rayons des cercles inscrits et circonscrits ce qui est plus proche encore de la méthode des isopérimètres de Descartes. Mais après tout, j'ai pris le parti de choisir De Cues pour faire connaître un peu ce personnage singulier !

Démonstration

Bien que cet algorithme ressemble beaucoup à la moyenne arithmético-géométrique (voir Salamin), la convergence n'est (hélas !) pas du tout comparable et plus proche d'une convergence linéaire que d'une convergence quadratique !

Comme pour Archimède, on considère un polygone à 2^n côtés de périmètre égal à 1 et l'on note a_n et b_n les rayons respectifs de ses cercles inscrits et circonscrits.

On a donc :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{a_n}\quad et\quad \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=\frac{\frac{1}{2}A_1A_2}{b_n}$$

d'où puisque le périmètre du polygone est *1*, on en déduit :
$2^n A_1A_2=1$ et

d'après précédemment, on a donc :

$$2^{n+1}a_n\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=1=2^{n+1}b_n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\quad soit\quad a_n=\frac{1}{2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}\quad b_n=\frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

Calculons maintenant :

$$\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2.2^{n+1}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+1}{2.2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2.2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}=a_{n+1}$$

$$\sqrt{a_{n+1}b_n}=\frac{1}{\sqrt{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}=\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{2n+3}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^{2n+4}\sin^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}}=b_{n+1}$$

Montrons que ces deux suites sont adjacentes :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} - \frac{1}{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{2^{n+2}\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^{2n+4}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} > 0$$

car *tan>sin*.

De même, $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)} - \frac{1}{2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2^{n+2}\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}$ donc

b_{n+1}-b_n est du signe de

$\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) < 0$ car $cos<1$ pour $n>0$.

D'où (b_n) est décroissante...

De plus, $tan(x) \sim x$ et $sin(x) \sim x$ en 0 donc il est immédiat que :

$$a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2^{n+1}\frac{\pi}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \xleftarrow{n\to\infty} \frac{1}{2^{n+1}\frac{\pi}{2^n}} \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$$

et nous avons aussi :

$0 < a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2}$ donc $b_n>a_n$ donc a_n et b_n sont bien adjacentes.

Finalement, on a donc :

$$\frac{1}{2b_n} \le \pi \le \frac{1}{2a_n}$$

Evaluons maintenant la rapidité de convergence :

$$\frac{1}{2a_n} - \frac{1}{2b_n} = 2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - 2^n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2^n\tan\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n\frac{\pi}{2^n}\left(1-1+\frac{\pi^2}{2.2^{2n}}\right)$$

donc :

$$\frac{1}{2a_n} - \frac{1}{2b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\pi^3}{2.4^n}$$

Ce qui nous donne une convergence linéaire (en passant au *log*). Vérifions tout cela par quelques essais...

Essais

Il ne faut néanmoins pas désespérer de cette convergence linéaire car la suite est tout de même facile à calculer et à accélérer...

	a_n=	b_n=
$n=5$	*3,1517 (1)*	*3,136 (1)*
$n=10$	*3,14160 (3)*	*3,141587 (4)*
$n=20$	*3,1415926535599 (10)*	*3,14159265358606 (11)*
$n=50$	*28* décimales exactes	*29* décimales exactes

On obtient ici une convergence en *3n / 5* environ

Accélération de la convergence

Aitken et son *Delta2* est ici particulièrement efficace. Voyons cela !

	$Delta2(a_n)$=	$Delta2(b_n)$=
$n=5$	*3,1422 (2)*	*3,14163 (3)*
$n=10$	*3,14159265418 (8)*	*3,14159265362 (9)*
$n=20$	*20* décimales justes	*22* décimales justes
$n=50$	*56* décimales exactes	*58* décimales exactes

C'est assez incroyable, mais le *Delta2* double la rapidité de convergence ! On obtient en effet une convergence de l'ordre de *1.2n*

Alors continuons et itérons le procédé (*Delta2* appliqué deux fois !)

	$Delta2^2(a_n)$=	$Delta2^2(b_n)$=
$n=5$	indisponible (div par zéro)	*3,1415953 (5)*
$n=10$	*12* décimales justes	*14* décimales exactes
$n=20$	*32* décimales justes	*32* décimales justes
$n=50$	*87* décimales exactes	*87* décimales exactes

On gagne encore un facteur de *50%* ! On a alors une convergence *1.75n* ce qui est tout à fait honorable pour une suite de cette simplicité apparente !
On pourra donc retenir cette suite parmi les archimédiennes comme une des plus rapides !

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr