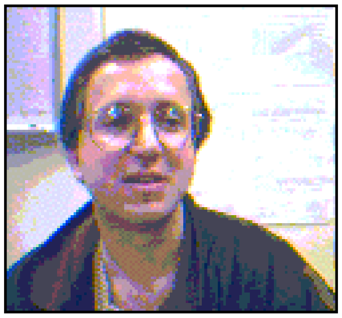
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr

Jonathan et Peter Borwein

Site des travaux sur Pi au CECM

Et voici le top du top !

1) *1984* : convergence quadratique (reposant sur la moyenne arithmético-géométrique)

$$a_0 = \sqrt{2} \qquad b_0 = 0 \qquad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{a_n}} \qquad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\,(1+b_n)}{a_n + b_n}$$

$$p_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad p_{n+1} = p_n b_{n+1} \frac{1 + a_{n+1}}{1 + b_{n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

2) *1987* : convergence quadratique (reposant aussi sur l'*AGM*)

$$y_0 = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt[4]{2} \qquad y_{n+1} = \frac{1 + y_n}{2\sqrt{y_n}} \qquad z_{n+1} = \frac{1 + y_n z_n}{(1 + z_n)\sqrt{y_n}}$$

$$f_0 = 2 + \sqrt{2} \qquad f_n = f_{n-1} \frac{1 + y_n}{1 + z_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

3) convergence quadratique (reposant sur les équations modulaires comme les suivantes)

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - y_n^2}}{1 + \sqrt{1 - y_n^2}} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{2} \qquad \alpha_{n+1} = \left(\left(1 + y_{n+1}\right)^2 \alpha_n\right) - 2^{n+1} y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

$$y_0 = \frac{1}{3} \qquad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - y_n^2}}{1 + 3\sqrt{1 - y_n^2}} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_{n+1} = \left(1 + 3y_{n+1}\right)\alpha_n - 2^n y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n \to \infty} \pi$$

4) convergence quadratique :

$$y_0 = 2 \quad y_n = \frac{4}{1+\sqrt{(4-y_{n-1})(2+y_{n-1})}} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3} \quad \alpha_n = y_{n-1}\alpha_{n-1} + \frac{2^{n-1}}{3}(1-y_{n-1})$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

5) convergence cubique :

$$y_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad y_n = \frac{1-\sqrt[3]{1-y_{n-1}^3}}{1+2\sqrt[3]{1-y_{n-1}^3}} \quad \alpha_0 = \frac{1}{3} \quad \alpha_n = \left((1+2y_n)^2\alpha_{n-1}\right) - 4.3^{n-2}(1+y_n)y_n$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

6) convergence quartique :

$$y_1 = \sqrt{2}-1 \quad y_{n+1} = \frac{1-\sqrt[4]{1-y_n^4}}{1+\sqrt[4]{1-y_n^4}} \quad \alpha_0 = 6-4\sqrt{2} \quad \alpha_{n+1} = \left((1+y_{n+1})^4\alpha_n\right) - 2^{2n+3}\left(1+y_{n+1}+y_{n+1}^2\right)y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

7) convergence quintique :

$$S_0 = 5\left(\sqrt{5}-2\right) \quad \alpha_0 = \frac{1}{2} \quad S_{n+1} = \frac{25}{S_n\left(Z+\frac{X}{Z}+1\right)^2}$$

$$\text{où} \quad X = \frac{5}{S_n} - 1 \quad Z = \frac{1}{2}\sqrt[5]{X\left(Y+\sqrt{Y^2-4X^3}\right)} \quad Y = (X-1)^2 + 7$$

$$\alpha_{n+1} = S_n^2\alpha_n - 5^n\left(\frac{S_n^2-5}{2} + \sqrt{S_n(S_n^2-2S_n+5)}\right) \quad \beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

8) convergence septique :

$$\alpha_0 = \frac{4}{3\sqrt{7}} \quad M = \left(2\cos\left(\frac{4\pi ij}{7}\right)\right)_{1\le i,j\le 3} \quad x_2 < x_1 < x_3 \text{ solutions de } 27^4x^3 - 27^3 32x^2 + 27^2 325x - 13^4 = 0$$

$$y_1 = \left(x_1^3x_3\right)^{\frac{1}{7}} \quad y_2 = \left(x_2^3x_1\right)^{\frac{1}{7}} \quad y_3 = \left(x_3^3x_2\right)^{\frac{1}{7}} \quad s_0 = \left(\frac{27}{13}\right)^{\frac{3}{7}}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad s_n = \frac{1}{7}\sqrt{m_{n-1}}\left[Ms_{n-1}^{\times} + 1\right]$$

$$g_1 = s_{1,n}s_{2,n}s_{3,n} \quad g_2 = s_{1,n}^3s_{2,n} + s_{2,n}^3s_{3,n} + s_{3,n}^3s_{1,n} \quad g_3 = 1 - \frac{10}{7}g_1 + \frac{1}{7}g_2 \quad g_4 = 3 - \frac{51}{7}g_1 + \frac{10}{7}g_2$$

$$m_n = \frac{49}{\left(1 + 2s_n^{\times}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)} \quad s_n^{\times} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\mu^3\gamma}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \\ \left(\frac{\beta^3\mu}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \\ \left(\frac{\gamma^3\beta}{g_3^3}\right)^{\frac{1}{7}} \end{pmatrix} \quad \beta < \mu < \gamma \text{ solutions de } x^3 - g_4x^2 + xg_3(2g_4 - 3g_3) - g_3^4 = 0$$

$$\alpha_n = m_{n-1}\alpha_{n-1} + \sqrt{7}\,\frac{7^{n-1}}{3}(1 - m_{n-1}) \xrightarrow{\infty} \frac{1}{\pi}$$

9) convergence nonique :

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1^{\times} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \quad s_1 = \left(1 - \left(s_1^{\times}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}} \quad s_{n+1} = \frac{(1 - s_n^{\times})^3}{(t + 2u)(t^2 + tu + u^2)}$$

$$\text{avec} \quad t = 1 + 2s_n^{\times} \quad u = \left[9s_n^{\times}(1 + s_n^{\times} + (s_n^{\times})^2)\right]^{\frac{1}{3}} \quad s_n^{\times} = \left(1 - \left(s_n\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$m = 27\,\frac{(1 + s_n + s_n^2)}{t^2 + tu + u^2} \quad \alpha_n = m\alpha_{n-1} + 3.9^{n-2}(1 - m) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

10) convergence "hexadécimalique" ! (ordre 16)

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1 = \sqrt{2} - 1 \quad s_1^{\times} = \left(1 - \left(s_1\right)^4\right)^{\frac{1}{4}} \quad s_{n+1} = \frac{(1 - s_n^{\times})^4}{(t + u)^2(t^2 + u^2)} \text{ avec}$$

$$m_1 = \left(\frac{1 + s_n}{t}\right)^4 \quad m_2 = \frac{1}{t^4} \quad t = 1 + s_n^{\times} \quad u = \left[8s_n^{\times}(1 + (s_n^{\times})^2)\right]^{\frac{1}{4}} \quad s_n^{\times} = \left(1 - s_n^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha_n = 16m_1\alpha_{n-1} + \frac{4^{2n-1}}{3}(1 - 12m_2 - 4m_1) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

11) 1989 : convergence linéaire :

$$\pi = \frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!(212175710912\sqrt{61} + 1657145277365 + (13773980892672\sqrt{61} + 107578229802750)n)}{(3n)!(n!)^3 (5280(236674 + 30303\sqrt{61}))^{3n+\frac{3}{2}}}\right)^{-1}$$

12) et pour le fun !

avec :

$\boldsymbol{A} = 63365028312971999585426220 + 28337702140800842046825600 * 5^{1/2} + 384 * 5^{1/2} (10891728551171178200467436212395209160385656017 + 4870929086578810225077338534541688721351255040 * 5^{1/2})^{1/2}$

$\boldsymbol{B} = 7849910453496627210289749000 + 3510586678260932028965606400 + 2515968 * 3110^{1/2} (6260208323789001636993322654444020882161 + 2799650273060444296577206890718825190235 * 5^{1/2})^{1/2}$

$\boldsymbol{C} = -214772995063512240 - 96049403338648032 * 5^{1/2} - 1296 * 5^{1/2} (10985234579463550323713318473 + 4912746253692362754607395912 * 5^{1/2})^{1/2}$

Tranches de vie

Jonathan et Peter Borwein sont des mathématiciens canadiens faisant partie du CECM rattaché à l'université Simon Fraser de Vancouver.
Jonathan en est le directeur et Peter son frère en est le directeur associé. Pour plus de renseignements, cliquez sur leurs noms et vous irez sur leur page personnelle.

Autour de π

Depuis plus de *15* ans, ces deux-là ont révolutionné la recherche sur *Pi* ! Après l'algorithme à convergence quadratique trouvé par Brent/Salamin en *1976*, ils ont alors pratiquement monopolisé les découvertes de séries. Quadratique, cubique, quartique, nonique... la vitesse de convergence ne s'est plus arrêtée depuis !
En fait, ils ont prouvé il y a quelques années qu'un algorithme à vitesse n-ique convergeant vers *Pi* existe pour tout *n* entier... Mais la complexité des calculs s'accroit très vite et il semble bien que l'algorithme à convergence quartique représente le meilleur rapport complexité/rapidité... Il a d'ailleurs été utilisé dans la plupart des records depuis sa découverte et notamment par Kanada pour calculer les 206 milliards de décimales récemment.
Vous l'aurez compris, les Borwein représentent aujourd'hui avec le petit groupe composé des Chudnovsky, Simon Plouffe, Garvan, Gosper et Bailey, le summum de la recherche active sur *Pi*.
En ce qui concerne la preuve de ces formules, je me dois malheureusement de passer outre le grand principe de ce site... Car ces démos sont déja transcrites sur le web à l'adresse suivante : www.cecm.sfu.ca/organics/papers/garvan/paper/html/paper.html. Pour les gens allergiques à l'anglais (comme moi !), la lecture d'une démo dans cette langue est toujours un peu pénible et puis elle fait ici cruellement défaut à mon sens. Mais il faut reconnaître aussi qu'il serait inutile de recopier bêtement *4* ou *5* résumés de démonstration sans pouvoir compléter les intermédiaires de calcul (même si le principe est assez simple à comprendre), n'étant pas du niveau d'un mathématicien...
Je retranscris donc seulement le résumé de la preuve pour le 3) (*2e* formule), qui est parfaitement représentatif du principe des démonstrations utilisant les équations modulaires... (voir la page conscrée à Ramanujan pour l'explication de cette théorie et du principe de la démonstration)

Démonstration :

Les techniques de cette démo font principalement appel aux thêta fonctions, à la fonction êta de Dedekind et à leurs propriétés.

1.1 Introduction :

Posons ainsi les thêta fonctions :

$$\theta_2(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \quad \theta_3(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \quad \theta_4(q) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}, \quad q = \exp\left(-\pi\sqrt{r}\right),\ r>0$$

On introduit ensuite la fonction α des Borwein : $\forall r \in R^{+*}$,

$$\alpha(r) = \frac{\left(\frac{1}{\pi} - 4\sqrt{r}q\frac{\dot{\theta}_4(q)}{\theta_4(q)}\right)}{\theta_3^4(q)} \qquad \left(\dot{\theta}_4(q) = \frac{d\theta_4(q)}{dq}\right)$$

Lorsque *r* -> $+\infty$, *q* -> *0* et $\lim_{q\to 0} \theta_3^4(q) = 1$ donc $\lim_{r\to\infty} \alpha(r) = \frac{1}{\pi}$.

Nous allons construire une infinité de suites α_p et trouver une relation entre $\alpha_p(N^2 r)$ et $\alpha_p(r)$ (comme le disent les Borwein, c'est une relation "agréable" si $N=p$!)

2.1 Construction des suites α_p

Pour cela, on pose $q=\exp(2i\pi\tau)$ et on considère η la fonction êta de Dedekind :

$$\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - e^{2i\pi n\tau}\right) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - q^n\right)$$

on rappelle pour la suite la relation trouvée par Euler :

$$\prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - q^{kj}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\frac{3kn(n-1)}{2}}$$

2.2 Cette fonction êta admet entre autre comme propriété :

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\frac{\tau}{i}}\,\eta(\tau)$$

2.3 Posons par ailleurs :

$$B_p(r) = \frac{\eta^p(\tau)}{\eta(p\tau)} \quad C_p(r) = \frac{\eta^p(p\tau)}{\eta(\tau)} \quad \text{où} \quad \tau = \frac{i\sqrt{r}}{rp} \quad \text{et donc} \quad q = e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}}$$

2.4 et posons enfin (ouf !) la fonction α_p définie par :

$$\alpha_p(r) = \frac{\left(\frac{1}{\pi} - \frac{q^{8\sqrt{r}}\dot{B}(q)}{(p-1)\sqrt{p}B(q)}\right)}{A_p(r)} \quad \text{avec} \quad A_p(r) = q\left(\frac{24}{p^2-1}\right)\left[\frac{\dot{C}(q)}{C(q)} - \frac{\dot{B}(q)}{B(q)}\right]$$

(facile à retenir, voyons...)

2.5 On a :

$A_p(r)=1+O(q)$

2.6 et d'après 2.2, $A_p\left(\frac{1}{r}\right) = rA_p(r)$

On a alors $\alpha_p\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{p+1}{3\sqrt{p}}\sqrt{r} - \alpha_p(r)\right)$

(toutes ces précédentes relations sont très difficiles à trouver mais heureusement vraies (!) et le principe est intéressant...)

2.7 Donc pour $r=1$ on a $\alpha_p(1) = \frac{p+1}{6\sqrt{p}}$ (ne dépend pas de π !!)

2.8 On a de plus, de même que pour α : $\lim_{r\to\infty} \alpha_p(r) = \frac{1}{\pi}$

3.1 Relation entre $\alpha_p(N^2 r)$ et $\alpha_p(r)$

Soient $N,p\geq 1$, on obtient :

$$\alpha_p\left(N^2 r\right) = \alpha_p(r).\, m_{N,p}(r) + \sqrt{r}E_{N,p}(r)$$

$$\text{avec} \quad E_{N,p}(r) = \frac{p+1}{3\sqrt{p}}\left(\frac{q\frac{\dot{B}(q)}{B(q)} - Nq^N\frac{\dot{B}(q^N)}{B(q^N)}}{q^N\frac{\dot{C}(q)}{C(q)} - q^N\frac{\dot{B}(q^N)}{B(q^N)}}\right) \quad \text{et} \quad m_{N,p}(r) = \frac{A_p(r)}{A_p(N^2r)}$$

Relation exceptionnelle sur laquelle sont basés tous ces algorithmes !!

3.2 D'après 2.4, on a :

$$A_p = \frac{1}{p-1}\left[pP\left(q^p\right) - P(q)\right] \quad \text{avec} \quad P(q) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n} = 24q\frac{\dot{\eta}(q)}{\eta(q)}$$

(La série utilisée s'appelle la série d'Eisenstein $E_2(q)$)

3.3 D'après 3.1, on a encore :

$$E_{p,p}(r) = \frac{\sqrt{p}}{3}\left(1 - m_{p,p}(r)\right)$$

3.4 et donc pour $N=p$ on a d'après 3.1 :

$$\alpha_p\left(p^2 r\right) = \alpha_p(r).\, m_{p,p}(r) + \frac{\sqrt{rp}}{3}\left(1 - m_{p,p}(r)\right)$$

or d'après 3.1 et 2.6 on a :

$$m_{p,p}\left(\frac{1}{p}\right)=p$$

3.5 On trouve donc pour $r=\frac{1}{p}$ et d'après 2.6 :

$$\alpha_p\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{3}$$

(Tiens, ne serait-ce pas un bon point de départ pour $\frac{1}{\pi}=0{,}318...$!!)

4.1 Construction de la suite

On pose

$$\alpha_n=\alpha_p(r_0\, p^{2n})$$

$r_0 p^{2n} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$

donc $\alpha_n \sim \frac{1}{\pi}$ car $\alpha_p(r_0\, p^{2n}) \to \frac{1}{\pi}$ d'après 2.8.

on pose également

$$m_n=m_{p,p}(r_0\, p^{2n})$$

Cette écriture n'étant pas ce que l'on peut appeler le plus pratique, on va donc chercher une relation entre α_n et α_{n-1} sachant que :

$\alpha_0=\alpha_p(r_0)$ pour $r_0=\frac{1}{p}$, donc $\alpha_0=\frac{1}{3}$.

La première partie de l'étude générale est terminée. Pour construire les algorithmes, la suite consiste à choisir un p particulier et puis d'introduire des formes modulaires $a(q)$, $b(q)$ et $c(q)$. L'existence d'une relation entre $a(q)$, $b(q)$, $c(q)$ et $a(q^p)$, $b(q^p)$, $c(q^p)$ nous fournit l'équation modulaire

$$a^p+b^p=c^p$$

(non, non, ce n'est pas le théorème de Fermat !!)
En définissant :
$s(q) = \frac{c(q)}{a(q)}$ et $s^*(q) = \frac{b(q)}{a(q)}$, on a $s^p+(s^*)^p=1$ et les relations entre s, s^* et α nous fournissent

l'algorithme...

Application à l'ordre 2 (p=2) :

5.1 Définitions :

D'après 3.2, on a $A_2(q)=2P(q^2)-P(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$ d'après 1.1 et 3.2

Posons par ailleurs :

5.2 $a(q)=\theta_3^4(q)+\theta_2^4(q)$

5.3 $b(q)=\theta_4^4(q)$

5.4 $c(q)=2\theta_2^2(q)\theta_3^2(q)$

L'équation modulaire associée est :

5.5 $a^2=b^2+c^2$

D'après 3.1 on a donc :

5.6 $m_{2,2}(r) = \dfrac{a(q)}{a(q^2)}$

Puis d'après 5.2 à 5.5, on trouve (pas facilement) :

5.7 $a(q^2) = \dfrac{a(q)+3b(q)}{4}$ et

5.8 $a(q)=a(q^2)+3c(q^2)$

En posant *s* et *s** comme définis plus haut, on en déduit :

5.9 $1+3s(q^2) = 1+3\dfrac{c(q^2)}{a(q^2)} = \dfrac{a(q)}{a(q^2)}$ et

5.10 $1+3s^{\times}(q) = 1+3\dfrac{b(q)}{a(q)} = 4\dfrac{a(q^2)}{a(q)}$, bien...

On a d'après 5.5 :

5.11 $s^2+(s^*)^2=1$

D'après 5.9 et 5.6, on a :

5.12 $m_{2,2}(r)=(1+3s(q^2))$ (pas trop dur, ça !)

et donc, d'après 5.10 et 5.9

$$4\frac{a(q^2)}{a(q)}\frac{a(q)}{a(q^2)} = 4 = (1+3s(q^2))(1+3s^{\times}(q))$$

D'autre part, d'après 3.4 et 5.12, on a

$$\alpha_2(4r) = \alpha_2(r).\, m_{2,2}(r) + \frac{\sqrt{2r}}{3}\left(1 - m_{2,2}(r)\right)$$

5.13 $$= \alpha_2(r)(1 + 3S(4r)) + \frac{\sqrt{2r}}{3}S(4r) \quad \text{où} \quad S(r) = s(q), \quad q = e^{-2\pi\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}}}$$

Or, de 3.4 et 3.5, on sait que $\alpha_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}$ et $m_{2,2}(\frac{1}{2})=p=2$

et d'après 5.12, $2=1+3S(2)$ donc $S(2)=\frac{1}{3}$.

5.14 On a alors $\alpha_n=\alpha(4^n\frac{1}{2})$

5.15 et $s_n=S(4^n\frac{1}{2})$

donc, finalement, on a $\alpha_0=\frac{1}{3}$, $s_1=S(2)=\frac{1}{3}$, et

$$(s_n)^2 + (s_n^\times)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad s_{n-1}^\times = \sqrt{1 - s_{n-1}^2}$$

$$(1 + 3s_n)(1 + 3s_{n-1}^\times) = 4 \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1 - \sqrt{1 - s_{n-1}^2}}{1 + 3\sqrt{1 - s_{n-1}^2}}$$

et d'après 5.13,

$$\alpha_n=(1+3s_n)\alpha_{n-1}-2^{n-1}s_n$$

d'où on tire (enfin !) l'algorithme suivant :

$$y_0 = \frac{1}{3} \qquad y_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - y_n^2}}{1 + 3\sqrt{1 - y_n^2}} \qquad \alpha_0 = \frac{1}{3} \qquad \alpha_{n+1} = \left(1 + 3y_{n+1}\right)\alpha_n - 2^n y_{n+1}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} \pi$$

Ce qui est le plus frustrant dans cette démo, c'est la simplicité du principe et l'horreur parallèle des calculs qui n'apparaît pas ici puisque les résultats les plus difficiles sont admis...

Concernant les séries, j'ai la formule générale de formation de ces séries et le principe, mais n'ayant pas tout compris, je vous laisse aller regarder sur le site des Borwein :

$$\pi = \sqrt{-j(t)}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(a(t)+n.\,b(t))\frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3(j(t))^n}\right)^{-1} \quad \text{avec}$$

$$b(t) = \sqrt{t(1728-j(t))} \qquad a(t) = \frac{b(t)}{6}\left(1-\frac{E_4(t)}{E_6(t)}\left(E_2(t)-\frac{6}{\pi\sqrt{t}}\right)\right)$$

$$j(t) = \frac{1728\left(E_4(t)\right)^3}{\left(E_4(t)\right)^3-\left(E_6(t)\right)^2} \quad \text{et les séries de Eisenstein :}$$

$$E_2(t) = 1-24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^n}{1-q^n} \qquad E_4(t) = 1+240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^n}{1-q^n}$$

$$E_2(t) = 1-540\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^n}{1-q^n} \quad \text{et} \quad q = -e^{-\pi\sqrt{t}}$$

La première série correspond au cas *t=427* et la seconde au cas *t=1555*.

Essais

Alors là par contre, pas d'essais trouvés sur le net, donc, en voici. Evidemment, ils sont assez époustouflants !
La deuxième formule a été testée aussi au chapitre Salamin...
Pour les suivantes, accrochons-nous ! L'ordre indique la vitesse de convergence (*2*->quadratique, *4*->quartique...), et le chiffre entre parenthèses la formule à laquelle le test se réfère...

n=	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*12*
Ordre *2* (2)	*2*	*8*	*18*	*40*	*83*	*170*	*344*	*693*	*1392*	*2789*	
Ordre *2* (3.2)	*0*	*2*	*7*	*18*	*40*	*84*	*171*	*345*	*694*		
Ordre *4*	*7*	*40*	*170*	*694*							*29360128*
Ordre *5*	*5*	*31*	*166*	*848*							

Je n'ai pu tester les ordres supérieurs à *5*, mon calculateur actuel ne dépassant pas *100* décimales de précision (ce qui est lamentablement petit, vu la rapidité de la convergence !)

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr