[page d'accueil](#)



Gauss (1777 - 1855) Möbius (1790 -1868) Euler (1707 - 1783)

Fonctions arithmétiques et Pi
r(n) de Gauss / Somme des diviseurs / Möbius / Indicatrice d'Euler

---

inspiré de l'excellent livre "Autour du nombre Pi" de P. Eymard et J.P. Lafon

En voilà de drôles de propriétés !

1) Fonction $r(n)$ de Gauss

Soit $r(n)$ le nombre de décompositions d'un entier n sous forme de 2 carrés,
alors $\lim_{n\to\infty} \frac{r(1)+r(2)+r(3)+\ldots+r(n)}{n} = \pi$

2) Fonction $\sigma(n)$ somme des diviseurs

Soit $\sigma(n)=\sum_{d\mid n} d$ c'est à dire la somme des entiers positifs qui divisent n.

Alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(1)+\sigma(2)+\sigma(3)+\ldots+\sigma(n)}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

3) Fonction $\mu(n)$ de Möbius

Soit $\mu(1)=1$; $\mu(n)=0$ si n possède au moins un facteur carré >1
et $\mu(p_1 p_2 \ldots p_k)=(-1)^k$ si $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont des nombres premiers distincts.
(exemple $\mu(2)=\mu(7)=-1$, $\mu(4)=\mu(8)=0$, $\mu(6)=\mu(10)=1$)

Alors pour s>1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^4} = \frac{90}{\pi^4}$ par exemple.

Beaucoup de résultats très impressionnants concernant cette fonction existent. Parmi eux, on peut citer aussi l'étonnante formule qui suit : en considérant Q l'ensemble des entiers $n \in N^*$ qui n'ont pas de facteur carré dans leur décomposition (c'est à dire tels que $|\mu(n)|=1$) on obtient la jolie formule suivante :

$$\sum_{n\in Q}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Cette approche permet aussi d'établir le magnifique théorème : La probabilité pour qu'un entier soit sans facteur carré est $\frac{6}{\pi^2}$

4) Fonction $\phi(n)$ indicatrice d'Euler

Soit $\phi(n)$ le nombre d'entiers strictement inférieurs à n et qui sont premiers avec n (n'ont pas de diviseur commun avec n).

Alors $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$ soit par exemple $\zeta(3)=\frac{\pi^4}{90}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^4}$ et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\ldots+\phi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}$$

Cette fonction permet là encore de redémontrer aussi habilement le théorème de Cesàro.

Quelques mots sur Möbius

Ce cher Möbius est un mathématicien Allemand né en 1790 en Saxe. Il fit ses études à Göttingen sous la direction de Gauss et devint astronome à Leipzig. Vivant de cette science, c'est néanmoins un passionné de mathématiques qui s'intéresse à la géométrie projective et à la théorie des nombres en introduisant sa célèbre fonction.

Autour de π

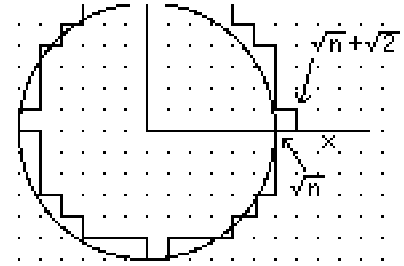
Les fonctions arithmétiques étudiées aux XVIIIe et XIXe siècle ont souvent une définition assez simple mais leurs propriétés semblent toujours sorties un peu de nulle part. Comment imaginer en effet que des propriétés sur les entiers puissent rejoindre le monde des réels ? Bien évidemment, il ne faut pas compter sur elles pour battre des records de calcul de décimales, mais chose étonnante, certaines qui sont présentées ici parmi les plus célèbres, ont un rapport étroit avec *Pi* !
C'est la plupart du temps dû aux valeurs de la fonction Zêta de Riemann, mais pour en arriver là, examinons plus en détail chaque fonction :

Démonstrations

1) Fonction $r(n)$ de Gauss

Donc, on rappelle que $r(n)$ est le nombre de décompositions d'un entier n sous forme de 2 carrés, combinaisons comprises. C'est à dire que l'on inclut dans ce nombre les combinaisons triviales avec les multiplications par -1 ou les ordres des carrés.
Par exemple, pour 5 , on a :
$5=(\pm 1)^2+(\pm 2)^2=(\pm 2)^2+(\pm 1)^2$
donc $r(5)=4+4=8$.
Les propriétés de la fonction ont été étudiées par Gauss et Jacobi notamment.
Le premier a démontré le résultat qui nous intéresse, et qui a une explication géométrique agréable.

Si l'on considère un disque de rayon $\sqrt{n}$, c'est à dire d'équation



$x^2+y^2=\sqrt{n}$, on voit que les couples (x,y) d'entiers qui vérifient $x^2+y^2=\sqrt{p}$ où $p\leq n$ sont dans le disque d'après la figure ci-contre (ils sont sur le bord du cercle de rayon $\sqrt{p}$ qui est plus petit que celui de rayon $\sqrt{n}$, ce sont les point à l'intérieur du cercle). Dessinons pour chacun de ces points dans le disque un carré dont le coin inférieur gauche est ce point.
On obtient alors une drôle de figure, que l'on appellera domaine D_n, dont l'aire est le nombre de carrés (de côté et donc d'aire 1) qu'il contient.

Mais $r(p)$ pour $p\leq n$ compte le nombre de points qui sont sur le cercle de rayon $\sqrt{p}$ donc tout point à l'intérieur du disque est comptabilisé dans un $r(p)$ pour $p\leq n$. Donc, le nombre de points et de carrés associés est $r(1)+r(2)+...+r(n)$.
L'aire du domaine D_n représenté plus haut est donc $r(1)+r(2)+...+r(n)$.

Mais D_n est compris dans un cercle de rayon $\sqrt{n}+\sqrt{2}$, c'est à dire *le rayon du premier cercle + la diagonale d'un carré de côté* 1 (Regardez la figure, la seule chose du domaine qui déborde du cercle ne dépasse jamais de plus d'une diagonale d'un carré, comme marqué)
De même, ce domaine peut contenir le cercle de rayon $\sqrt{n}-\sqrt{2}$. Ces disques ont pour aire $\pi\left(\sqrt{n}\pm\sqrt{2}\right)^2$ donc finalement, on a comme encadrement de l'aire de D_n :

$$\pi\left(\sqrt{n}-\sqrt{2}\right)^2\leq r(1)+r(2)+...+r(n)\leq\pi\left(\sqrt{n}+\sqrt{2}\right)^2$$
$$\Rightarrow\left|r(1)+r(2)+...+r(n)-\pi n\right|\leq 2\pi\sqrt{2}\sqrt{n}+2\pi+1\leq 2\pi(\sqrt{2}+2)\sqrt{n}$$
$$\Rightarrow r(1)+r(2)+...+r(n)=\pi n+O\left(\sqrt{n}\right)$$

Et voilà !
On a bien $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r(1)+r(2)+r(3)+...+r(n)}{n}=\pi$

Au lieu de considérer $O(\sqrt{n})$, on pourrait chercher pour quelle puissance de n minimale (notons-la a) le résultat est encore valable, en d'autres termes, quelle est la vitesse de convergence.
Comme le rappelle *Autour du nombre Pi* de Eymard/Lafon, c'est l'objet de nombreuses recherches depuis un siècle et demi.
On vient de montrer que $a\leq 1/2$. Hardy et Landeau ont prouvé indépendamment de leur côté que $a\geq 1/4$. On conjecture fortement que $a=1/4$ mais cela n'a pas encore été démontré. Le meilleur coefficient connu est actuellement $a\leq 22/73$ et provient de Huxley (1993).

Dans le même ordre, on peut généraliser à $r_k(n)$ le nombre de décomposition de n par la somme de k carrés. Cela revient à travailler non plus dans R^2 pour deux carrés, mais dans R^k.
On obtient de même $V_k\left(\sqrt{n}-\sqrt{k}\right)\leq r_k(1)+r_k(2)+...+r_k(n)\leq V_k\left(\sqrt{n}+\sqrt{k}\right)$
avec $V_k(R)$ le volume d'une boule de rayon R en dimension k.
Mais d'après le grenier, on sait que cela vaut :

$$V_m = \frac{(\pi R^2)^m}{m!}$$

pour la dimension m .
Donc, on en conclut ici :

$$r_k(1) + r_k(2) + \ldots + r_k(n) = V_k\left(\sqrt{n}\right) + O\left(n^{\frac{k-1}{2}}\right)$$

avec $V_{2p}\left(\sqrt{n}\right) = \frac{\pi^p}{p!} n^p, \quad V_{2p+1}\left(\sqrt{n}\right) = 2\frac{(2\pi)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)} n^{p+\frac{1}{2}}$

---

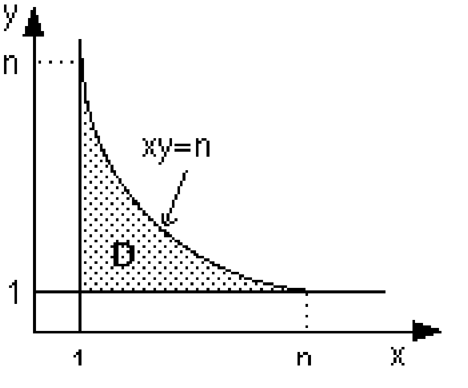
2) Fonction $\sigma(n)$ somme des diviseurs

On rappelle encore une fois que $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$, c'est à dire la somme des entiers positifs qui divisent n.

Quelques exemples, pour y voir un peu plus clair !
$\sigma(1)=1$, $\sigma(2)=1+2=3$, $\sigma(6)=1+2+3+6=12$, $\sigma(12)=1+2+3+4+6+12=28$
Cette fonction est multiplicative pour deux entiers premiers entre eux.

Entrons dans le vif du sujet et faisons un peu de dénombrement
$\sigma(1)+ \sigma(2)+\ldots+ \sigma(n)$ contient les diviseurs de chaque entier $\leq$ n comptés un certain nombre de fois, et on en fait la somme. on va chercher à déterminer ce "certain nombre de fois" par diviseur.
Fixons ainsi un x entre 1 et n , on cherche d'abord les y_p tels que $xy_p = p$, $p \leq n$.
Donc pour l'ensemble des $p \leq n$, on aura bien compté toutes les fois qu'apparaîssent les diviseurs y_p des $\sigma(p)$ en même temps que le diviseur x . Ensuite, on somme les y_p sur tous les x , et on obtient la valeur voulue de $\sigma(1)+ \sigma(2)+\ldots+ \sigma(n)$.

Considérons donc la droite $xy=n$ dans le plan comme ci-contre.



Fixer x revient à compter les y tels que $xy \in D$.

Ainsi en notant $[a]$ la partie entière de a , on a
$\sigma(1)+ \sigma(2)+\ldots+ \sigma(n)=$

$$\sum_{(x,y)\in D} y = \sum_{x=1}^{n} \sum_{y\leq\left[\frac{n}{x}\right]} y = \sum_{x=1}^{n} \frac{\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\left(\left[\frac{n}{x}\right]+1\right)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{x=1}^{n}\left(\frac{n}{x}+O(1)\right)\left(\frac{n}{x}+O(1)\right)$$

$$= \frac{n^2}{2}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x^2} + O\left(n\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x}\right) + O(n)$$

mais on sait que $\sum_{x=n+1}^{\infty}\frac{1}{x^2} \leq \int_n^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{n}$ par majoration terme à terme donc

$$\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x^2} = \sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x^2} - \sum_{x=n+1}^{\infty}\frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

On sait également que gamma, la constante d'Euler, vaut

$\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x} - Ln(n)$ donc $\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{x} = O(Ln(n))$ et finalement

$$\sigma(1)+\ \sigma(2)+...+\ \sigma(n)= \frac{\pi^2}{12}n^2 + O(n.Ln(n))$$

chouette, encore une autre de faite...

Comme pour le 1), d'intenses recherches s'effectuent autour du meilleur reste possible et pour l'istant, A. Walfisz détient la palme avec $O(n.Ln^{2/3}(n))$ trouvé en *1963* .

---

3) Fonction $\mu(n)$ de Möbius

Soit $\mu(1)=1$; $\mu(n)=0$ si n possède au moins un facteur carré >1 et $\mu(p_1 p_2 ...p_k)=(-1)^k$ si p_1, p_2, ..., p_k sont des nombres premiers distincts (exemple $\mu(2)=\mu(7)=-1$, $\mu(4)=\mu(8)=0$, $\mu(6)=\mu(10)=1$).

Lemmes

1) Une des premières propriétés (très chouette) de cette fonction est la suivante :

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \begin{cases} 1 & si\ \ n=1 \\ 0 & si\ \ n>1 \end{cases}$$

La démonstration est simple, le résultat est évident par définition pour $n=1$. Prenons maintenant un $n>1$ et montrons que la somme est nulle.

L'entier n se décompose comme d'habitude en un produit de fateurs premiers donc on peut l'écrire :

$n=p_1^{a1} p_2^{a2} ...p_k^{ak}$. Si l'on veut écrire la somme sur les diviseurs de n , cela correspond à prendre la somme sur les premiers p_i , puis sur les couples de premiers

$p_i p_j$, les triplets, etc.. soit :

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \sum_i \mu(p_i) + \sum_{i \neq j} \mu(p_i p_j) + \ldots = 1 - k + C_k^2 - C_k^3 + \ldots = (1-1)^k = 0$$

d'après la définition $\mu(p_1 p_2 \ldots p_k) = (-1)^k$ et ensuite on compte le nombre de couples, triplets qu'il peut exister dans la somme (d'où les combinaisons) et enfin, on reconnait la formule du binôme de Newton.

2) μ est une fonction multiplicative, et fournit un résultat assez fort qui pemet d'inverser certaines formules :

$$g(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f\left(\frac{x}{n}\right) \quad alors \quad f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right)$$

(effectivement, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) \sum_{m=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} f\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k=1}^{[x]} f\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{n|k} \mu(n) = f(x)$)

Démo :

Bon, c'est une bonne chose, passons maintenant aux démos qui nous intéressent :

Preuve de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} = \frac{6}{\pi^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^4} = \frac{90}{\pi^4}$:

On aura besoin d'un petit lemme, que l'on pourrait appeler lemme de Dirichlet :
Soit $f(s)$ et $g(s)$ les séries dites de Dirichlet définies par :

$\displaystyle f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}, \quad g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$. La multiplication de ces deux séries donne :

$$f(s)g(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s} \;, \quad c_n = \sum_{dd'=n} a_d b_{d'}$$

Calculons maintenant en utilisant cette multiplication de Dirichlet :

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right) \zeta(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^s}\right)$$

avec $\displaystyle c_n = \sum_{dd'=n} \mu(d).1 = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \\ 0 & si \quad n > 1 \end{cases}$ donc finalement

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n^s}=1$$

d'où le résultat $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$ soit $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^4}=\frac{90}{\pi^4}$

Allons encore plus loin, comme je l'ai dit plus haut, en considérant Q l'ensemble des entiers $n \in N^*$ qui n'ont pas de facteur carré dans leur décomposition (c'est à dire tels que $|\mu(n)|=1$) on obtient la jolie formule suivante :

$$\sum_{n\in Q}\frac{1}{n^s}=\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

La démonstration n'est pas très difficile mais elle oblige à une généralisation longue de certains résultats, et pour l'instant, je n'ai pas envie que cette page devienne un monstre...Je ne résisterai pas par contre au plaisir de pouvoir donner un petit résultat que je trouve encore plus impressionnant :

La probabilité pour qu'un entier soit sans facteur carré est $\dfrac{6}{\pi^2}$

Démo :

On définit $Q(x)$ pour x réel comme le nombre des entiers k inférieurs à x et qui sont sans facteurs carrés. D'après la définition même de la fonction de Möbius, on peut écrire pour n entier :

$Q(n)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\mu(k)|$. Pour montrer le théorème, il suffit de regarder la proportion de $Q(n)$ par rapport à n , c'est à dire montrer que

$$Q(n)=\frac{6}{\pi^2}n+O(n^{1/2})$$

Le principe consiste tout d'abord à ranger un entier k dont le plus grand facteur carré est d^2 dans un ensemble E_d . On fait cela pour tout $k \leq n$. Pour E_1 , bien sûr, cela correspond à l'ensemble des entiers sans facteurs carrés. Et puisqu'il n'y a pas de facteur carré supérieur à $n^{1/2}$ dans n (forcément !), E_d est vide pour $d>n^{1/2}$. Comptons le nombre d'éléments de Ed :

Il est tout d'abord clair que $card(E_1)=Q(n)$.

Pour les autres E_d , prenons $k=d^2*k'$ dans E_d .

$k' \leq n/d^2$ car $k \leq n$.

D'autre part, k' n'a pas de facteur carré car si il en avait un (notons le a par exemple), $a.d$ serait aussi un facteur carré de k et puisque $a.d>d$, k appartiendrait à un autre E_i . Donc

finalement $card(E_d)=$ nombre de $k' \leq n/d^2$ sans facteur carré, donc :
$card(E_d)=Q(n/d^2)$

Comme on a n entiers non nuls inférieurs à n (!), et qu'ils sont tous compris dans un E_d, on peut écrire :

$$n=\sum_{d\leq\sqrt{n}} Q\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

Ensuite, on applique la fameuse formule d'inversion de Möbius à $f(x)=Q(x^2)$ avec $n^{1/2}=x$
et donc à $g(n)=n^2$, $g(x)=[x^2]$ pour x réel.

Cette formule permet le calcul suivant, dont les intermédiaires sont (il me semble...) assez évidents :

$$Q(n)=\sum_{d\leq\sqrt{n}}\mu(d)g\left(\frac{\sqrt{n}}{d}\right)=\sum_{d\leq\sqrt{n}}\mu(d)\left[\frac{n}{d^2}\right]=\sum_{d\leq\sqrt{n}}\mu(d)\left(\frac{n}{d^2}+O(1)\right)=n\sum_{d\leq\sqrt{n}}\frac{\mu(d)}{d^2}+O(\sqrt{n})$$

$$=n\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(n\sum_{d>\sqrt{n}}\frac{1}{d^2}\right)+O(\sqrt{n})=\frac{6}{\pi^2}n+O(\sqrt{n})$$

Enfin, pour le $O(somme)$, le résultat provient tout de même de :

$$n\sum_{d>\sqrt{n}}\frac{1}{d^2}\leq n\sum_{d>\sqrt{n}}\int_{\sqrt{d}}^{\sqrt{d}+1}\frac{1}{x^2}dx\leq n\int_{\sqrt{n}-1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=n\frac{1}{\sqrt{n}-1}=O\left(\sqrt{n}\right)$$

4) Fonction $\phi(n)$ indicatrice d'Euler

Rappel : $\phi(n)$ le nombre d'entiers strictement inférieurs à n et qui sont premiers avec n (n'ont pas de diviseur commun avec n).

Lemmes :
1) Un premier lemme énonce que ϕ est multiplicative pour deux entiers m et n premiers entre eux, c'est à dire

$$\phi(n.m)=\phi(n).\phi(m)$$

En effet, si l'on cherche à évaluer $\phi(n)$, on part de la définition : d'après le théorème de Bézout, k et n sont premiers entre eux si et seulement si il existe u et v entiers tels que $u.k+v.n=1$ donc c'est équivalent à k inversible modulo n .
Donc $\phi(n)$ est le cardinal du groupe des inversibles de Z/nZ . Comme m et n sont premiers entre eux, d'après le fameux lemme chinois, il existe un isomorphisme entre Z/mnZ et $Z/nZ*Z/mZ$ donc les groupes inversibles de ces deux anneaux ont même cardinal et $\phi(n.m)=\phi(n).\phi(m)$.

(ouf, voilà quelques souvenirs douloureux d'algèbre !)

2) Maintenant, si l'on veut évaluer ϕ pour tout n, commençons par décomposer ce pauvre entier : $n=p_1^{a1} p_2^{a2} \dots p_k^{ak}$, a_i entier non nul, et calculons ϕ pour p_i^{ai} :
Entre 1 et p_i^{ai} (non compris), il y a $p_i^{ai}-1$ entiers (!) et comme seuls les multiples de p_i sont diviseurs de p_i^{ai} car p_i premier, ces diviseurs sont :
$pi, 2pi, 3pi, \dots, (p_i^{ai-1})p$. Il y en a donc $p_i^{ai}-1$.
Donc le nombre d'entiers premiers avec n est :

$$\phi(p_i^{ai})=p_i^{ai}-1-\text{nombre de diviseurs de } n=p_i^{ai}-1-(p_i^{ai-1}-1)=p_i^{ai}(1-1/p)$$

Et comme les p_i^{ai} sont forcément premiers entre eux, on peut calculer $\phi(n)$ grâce à la multiplicité de ϕ :

$$\boxed{\phi(n)=\prod_i p_i^{a_i}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

Par exemple, $500=2^2\,5^3$ donc $\phi(500)=500(1-1/2)(1-1/5)=200$.

3) Développons le produit ci-dessus, on obtient :

$$\frac{\phi(n)}{n}=1-\sum_{p|n}\frac{1}{p}+\sum_{p,p`|n}\frac{1}{pp`}-\sum_{p,p`,p''|n}\frac{1}{pp`p''}+\dots$$

Si l'on a $d=p_1\,p_2\dots p_k$, les p_i étant tous distincts comme dans la somme, alors $\mu(d)=(-1)^k$ donc $\frac{\mu(d)}{d}=\frac{\mu(p_1p_2\dots p_k)}{p_1p_2\dots p_k}=\frac{(-1)^k}{p_1p_2\dots p_k}$.
Donc, dans tous les cas, on peut écrire :

$$\boxed{\frac{\phi(n)}{n}=\sum_{d=p_1p_2\dots p_k}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}}$$

car si d a un facteur premier carré, la fonction de Möbius appliquée à d est nulle d'après la définition.
Cool...

Démo :
Bon, alors il s'agit maintenant de montrer $\lim_{n\to+\infty}\frac{\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\dots+\phi(n)}{n^2}=\frac{3}{\pi^2}$ puis

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}\dots$$

On commenca à s'en douter depuis le temps, le lemme précéent faisant intervenir la fonction de Möbius va sacrément intervenir !
Lançons-nous hardiment dans les calculs :

$$\sum_{m=1}^{n}\phi(m)=\sum_{m=1}^{n}m\sum_{d|m}\frac{\mu(d)}{d}=\sum_{dd'\leq n}d'\mu(d)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{d'=1}^{\left[\frac{n}{d}\right]}d'=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\frac{\left[\frac{n}{d}\right]\left(\left[\frac{n}{d}\right]+1\right)}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\frac{n^2}{d^2}+O\left(\frac{n}{d}\right)\right)=\frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(n\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\right)=\frac{n^2}{2}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+O\left(n^2\sum_{d=n+1}^{n}\frac{1}{d^2}\right)+O(n.Ln(n))$$

$$=\frac{1}{2}\frac{6}{\pi^2}n^2+O(n)+O(n.Ln(n))=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n.Ln(n))$$

Ouf...
Là encore, de nombreuses recherches ont abouti à un nouveau coup d'éclat de Walfisz (1963) qui trouva le meilleur reste connu actuellement , $O(n(Ln(n))^{2/3}(Ln(Ln(n)))^{4/3})$.

Pour prouver la seconde formule, on va utiliser la multiplication de Dirichlet et le résultat que l'on a montré un peu plus haut : $\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^s}=\frac{1}{\zeta(s)}$

$$\frac{1}{\zeta(s)}.\zeta(s-1)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^s}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}.n\right)\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^s}$$

et voilà ! Pas trop difficile, n'est-ce-pas ? Mais il faut simplement réellement s'y plonger...

Cette dernière formule permet par exemple de trouver :

$$\zeta(3)=\frac{\pi^4}{90}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi(n)}{n^4}$$

Une dernière conséquence de ce résultat, le fameux théorème de Cesàro ! Incroyable de le retrouver ici, mais la définition de la fonction indicatrice d'Euler le laissait présager. En effet, comptons le nombre de couples d'entiers (p,q) compris entre 1 et n . Si $p=1$, q peut prendre les valeurs 1 à n , soit n valeurs. Si $p=2$, q peut prendre les valeurs 2 à n (car $(2,1)$ a déjà été compté sous la forme $(1,2)$ précédemment lorsque $p=1$) soit $n-1$ valeurs, et ceci jusqu'à $p=n$. Donc il y a $1+2+3+...+n=n(n+1)/2$ couples (p,q) .
Le nombre d'entiers premiers avec p fixé est tout simplement la valeur de la fonction $\phi(p)$ par définition. Donc jusqu'à n , le nombre de couples d'entiers (p,q) premiers entre eux est $\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+...+\phi(n)$.
Donc la probabilité pour que deux entiers positifs soient premiers entre eux vaut la limite de la proportion de la somme des $\phi(k)$ (cas favorables) sur le nombre $n(n+1)/2$ de couples (p,q) (cas totaux) soit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(n)}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{\pi^2\,\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{6}{\pi^2}$$

Chouette...

Essais

Pouf, même pas la peine ! Les fonctions arithmétiques ne sont pas du tout faites pour cela et dépendent d'ailleurs pour la plupart d'entre elles de la série $\zeta(s)$ donc connaissent également une convergence logarithmique navrante...

---

retour à la page d'accueil