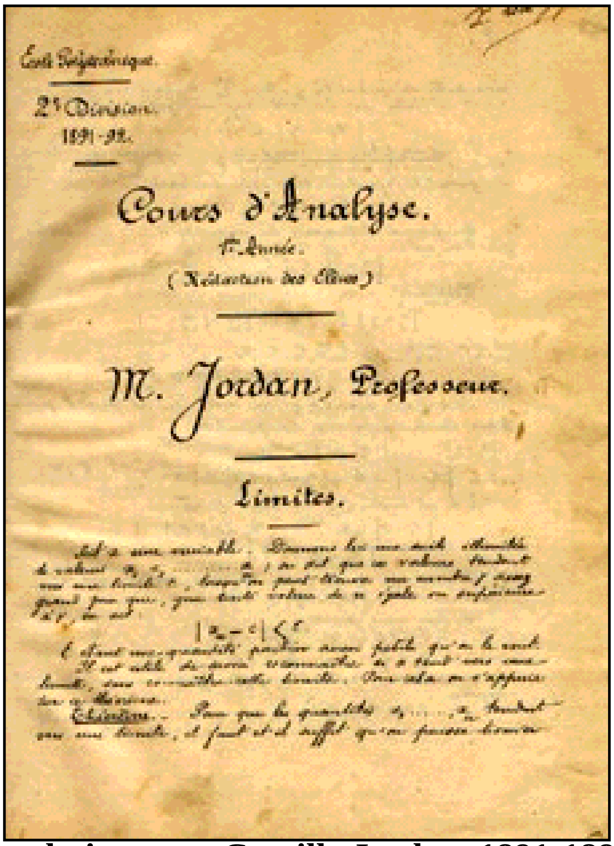
Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr



cours d'analyse à Polytechnique par Camille Jordan, 1891-1892, archive personnelle

Ah, enfin l'analyse !
XVIIIe siècle - fin XIXe siècle

Le temps des querelles

Comme d' habitude à cette époque, de violentes querelles apparaissent :
Une des plus célèbres concerne Leibniz (*1646-1716*) et Newton (*1642-1727*) qui se disputent la paternité de la découverte du calcul différentiel et perdent beaucoup d'énergie... Il n'en reste pas moins que malgré le scepticisme de certains (Rolle, par exemple, qui ne croit pas en cette révolution et va se fâcher avec Varignon, mais n'en fournit pas moins un des théorèmes les plus célèbres de cette théorie), le calcul différentiel va bouleverser les mathématiques... Les résultats apparaissent rapidement et la recherche sur *Pi* va en bénéficier comme aucune autre. C'est la première fois que des formules ne traduisent plus directement le lien entre la géométrie par laquelle on définit *Pi* et *Pi* lui-même. C'est d'ailleurs une des choses qui à mon avis fascinent le plus dans l'étude de *Pi*. On a affaire à de grosses formules dans lesquelles il est bien difficile de reconnaître une propriété géométrique, et pourtant on obtient *Pi*.
Et la prime à la recherche d'une solution concernant le fameux problème de la quadrature du cercle offerte par l'académie des Sciences engendre un intérêt toujours grand sur la géométrie.
Mais tout cela ne s'est pas fait en un jour :

Les prémices de l'analyse...

Si il y a un mathématicien qui symbolise un peu ce passage de la géométrie à l'infinitésimal ou à la conscience de l'infini, c'est Wallis (*1616-1703*). Ses manipulations de suites infinies et ses recherches sur l'aire d'un quart de cercle (en partant de l'intégrale de $(1-x^2)^n$ pour arriver à $n=1/2$) le poussent vers des horizons encore inconnus jusqu'alors. Il trouve ainsi après une démonstration restée célèbre en raison de ses méandres une très belle formule, le premier produit infini de rationnels convergeant vers *Pi* :

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

La convergence est éxécrable, mais c'est peut-être la première véritable suite convergeant vers Pi sortie de l'analyse. Lui succède alors Lord Brounker (*1620-1684*), un ami de Wallis, qui, sur sa demande, continue les recherches vers les fractions continues et transforme le résultat de Wallis en un célèbre développement de *4/Pi* qui donne :

$$\pi = 4\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\ldots}}}}$$

Tout cela tourne beaucoup autour de l'infinitésimal mais ce n'est qu'avec le calcul différentiel que vont vraiment s'épanouir ces techniques.

L'envol de l'analyse :

Newton et ses fluxions contre Leibniz et ses *dy/dx*... L'un comme l'autre ont au moins le mérite d'avoir eu la vision d'un des bouleversement des mathématiques.
Newton applique cette théorie aux séries infinies (développements limités) et en déduit le développement d'*arcsin* et donc de belles formules sur *Pi*. A la même époque, Grégory n'est pas en reste et s'intéresse lui plutôt à celui d'*arctan*. Mine de rien, et même si il est bien connu que la formule de Leibniz est un corollaire immédiat de ce résultat ($x=1$) mais ne figure pas dans les oeuvres de Grégory, le développement d'*arctan* va jouer par la suite un rôle éminemment primordial dans le calcul des décimales de *Pi*, via la formule de Machin par exemple. On a en effet :

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

pour x entre -1 et 1, ce qui est un résultat assez fort. (encore plus si l'on considère la complexité du développement limité de *tan* !)
Continuons le chemin chronologique de la grande histoire des

mathématiques...
Après que la prédominance mathématique se soit installée en Angleterre sous l'impulsion de Newton, celle-ci revient sur le vieux continent, en Suisse notamment avec les Bernoulli et Euler. C'est la grande époque de l'analyse. Euler fouille partout et défriche inlassablement pour nous fournir d'innombrables formules.
La plus belle est certainement :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

qui n'apporte guère au calcul des décimales mais dont la simplicité est tout à fait remarquable....

La diversification

Pi, ce n'est pas seulement la géométrie et l'analyse ! Buffon (*1707-1788*) nous prouve avec son célèbre problème de l'aiguille que *Pi* intervient aussi dans le domaine des probabilités. Bien sûr, ce résultat est dû à la définition de *Pi* comme composante de l'aire et du périmètre du cercle, mais d'autres résultats viendront qui confirmeront la présence de *Pi* dans toutes les branches des mathématiques... (voir Cesàro)
Et un gros problème tracassait de plus les mathématiciens depuis l'Antiquité : celui de l'irrationnalité. Ils la soupçonnaient vraie mais n'avaient jamais réussi à la prouver. Euler avait montré celle de *e* et Lambert apporta une réponse au problème pour *Pi* en *1761*. *Pi* était bien irrationnel !
Voilà en fait le résultat peut-être paradoxalement le plus important que l'on ait trouvé sur la répartition des décimales de *Pi* tant cette dernière demeure un mystère encore de nos jours. L'irrationnalité indique ainsi qu'elles ne sont pas périodiques...
Restait la transcendance. Malgré les efforts de beaucoup de mathématiciens (et amateurs qui cherchent toujours à résoudre la quadrature du cercle !), cette citadelle reste imprenable encore pour un siècle. Et les délires des mathématiciens amateurs obligent de plus l'académie des Sciences à refuser à partir de *1775* les tentatives de démonstration de la quadrature du cercle, conséquence immédiate de la transcendance.
Un des mathématiciens qui selon moi va apporter le plus indirectement à la recherche sur *Pi* est Joseph Fourier (*1768-1830*). Sa théorie sur la décomposition d'une fonction périodique en série, encore à finaliser mais qui va faire l'objet d'un passage à la rigueur tout au long du *XIXe* siècle, est véritablement révolutionnaire (tant d'ailleurs que certains mathématiciens de l'époque comme Poisson s'élèveront contre avec beaucoup d'énergie !). Ce résultat permet en effet de redémontrer simplement à peu près toutes les formules de ce bon vieux Euler. Et bien sûr d'en trouver de nouvelles assez intéressantes.

Pi tombe dans l'ombre...

Le *XIXe* siècle arrive... Bizarrement, le plus brillant représentant du génie scientifique de ce siècle, Maître Gauss (*1777-1855*), malgré son talent

incomparable, n'est pas celui qui apportera le plus à la recherche sur *Pi*. On lui doit quelques petites formule d'*arctan*, mais pas de quoi se rouler par terre !
Bien que *Pi* continue à apparaître dans de nombreux résultats, le *XIXe* siècle se tourne plutôt vers l'algèbre et l'arithmétique avec Galois, Abel, Sophie Germain et les tout nouveaux théoriciens de la géométrie non euclidienne tels Gauss, Beltrami, Lobatchevski et Bolyai.
Le calcul des décimales semble aussi s'essoufler après la deuxième moitié du *XIXe* siècle. Tout cela malgré le talent extraordinaire de Zacharias Dase, et l'ardeur de quelques passionnés comme Shanks. Employé par Strassnitsky pour calculer *200* décimales, ce qu'il fit en deux mois, Dase était l'annonciateur des ordinateurs modernes par ses fantastiques capacités de calcul(il pouvait multiplier de tête deux nombres de *100* chiffres en *8h*, en faisant des pauses, ou bien dormant une nuit entière, et reprenant plus tard !) . Il faut dire que l'on est arrivé à ce qui était humainement possible de calculer à la main avec Shanks qui obtient *707* décimales en *1852* alors qu'au siècle suivant, en *1944*, on démontrera que seules *527* étaient bonnes. Une erreur qui aura donc durée *92* ans !
Et depuis les formules d'*arctan*, on n'a toujours pas trouvé à cette époque un moyen d'aller plus vite et plus loin en théorie comme en pratique...
De plus, le plus vieux problème mathématique se trouve résolu par Lindemann en *1882* lorsqu'il démontre la transcendance de *Pi*. La quadrature du cercle est donc impossible...
Comment va-t-on sortir de cette impasse et se remotiver ?
C'est qu'au fin fond de l'Inde grandit en cette fin de *XIXe* siècle un personnage qui va tout bouleverser et révolutionner le siècle à venir...
L'ère des algorithmes et de l'informatique va commencer avec lui... Suite à la section "Les ordis au travail"

Par Boris Gourévitch "L'univers de Pi"
http://go.to/pi314
sai1042@ensai.fr