Le Nombre

Bertrand Germain – Vincent Moreau
Antoine Riche – Yann Spadari

π
le nombre diachronique

Licence de Mathématiques

Université Claude-Bernard – Lyon 1

Juin 2000

Sommaire

Introduction – π le nombre diachonique

Nous allons adopter un point de vue diachronique afin d'étudier les différentes phases dans la notion du nombre π.

Nous allons tout d'abord expliciter comment a germé l'idée du nombre dans différentes civilisations et comment a évolué son estimation. Ensuite nous mettrons en évidence l'apport de l'heuristique archimédienne qui représente un tournant fondamental dans la connaissance de π. Puis comment l'intérêt pou π a engendré des formules infinies. Par ailleurs, afin de mieux saisir l'importance de ce nombre, nous étudierons le contexte historique du problème de la quadrature du cercle. Enfin nous terminerons par un état des l'art sur les calculs de l'extrême, de Ramanujan au summum dans ce domaine, à savoir les travaux de Borwein et Borwein.

1 Chapitre 1 – L'idée du nombre – Yann Spadari

1.1 Le π des anciens

En évoquant les mathématiques anciennes, il nous arrive de faire des anachronismes. En effet, affirmer que les Egyptiens avaient évalué que $\pi = (16/9)^2$ serait un peu ridicule. Tout d'abord le symbole « = » ne fut introduit qu'en 1557 par le physicien anglais Robert Recorde. Ensuite π ne désigne cette constante que depuis le XVIIIème siècle. Enfin le concept de nombre aujourd'hui en usage, implicite dans la définition de π comme « nombre réel », n'est fixé que depuis la fin du XIXème. Si l'on ajoute que nos chiffres décimaux et nos notations algébriques étaient inconnus des Egyptiens, vous comprendrez qu'ils n'ont jamais rien écrit qui ressemble, même de loin, à la formule : $\pi = (16/9)^2$.

Si l'on voulait s'exprimer de façon plus correcte, il faudrait dire que dans leurs calculs, les Egyptiens suivent un procédé dont la justification présupposerait qu'il existe une constante fixant le rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon, et que cette constante vaut $(16/9)^2$.

Notre but étant de retracer rapidement l'histoire ancienne de π, nous utiliserons par commodité nos notations et notre langage moderne même en parlant d'époque antérieure.

1.2 Les Babyloniens

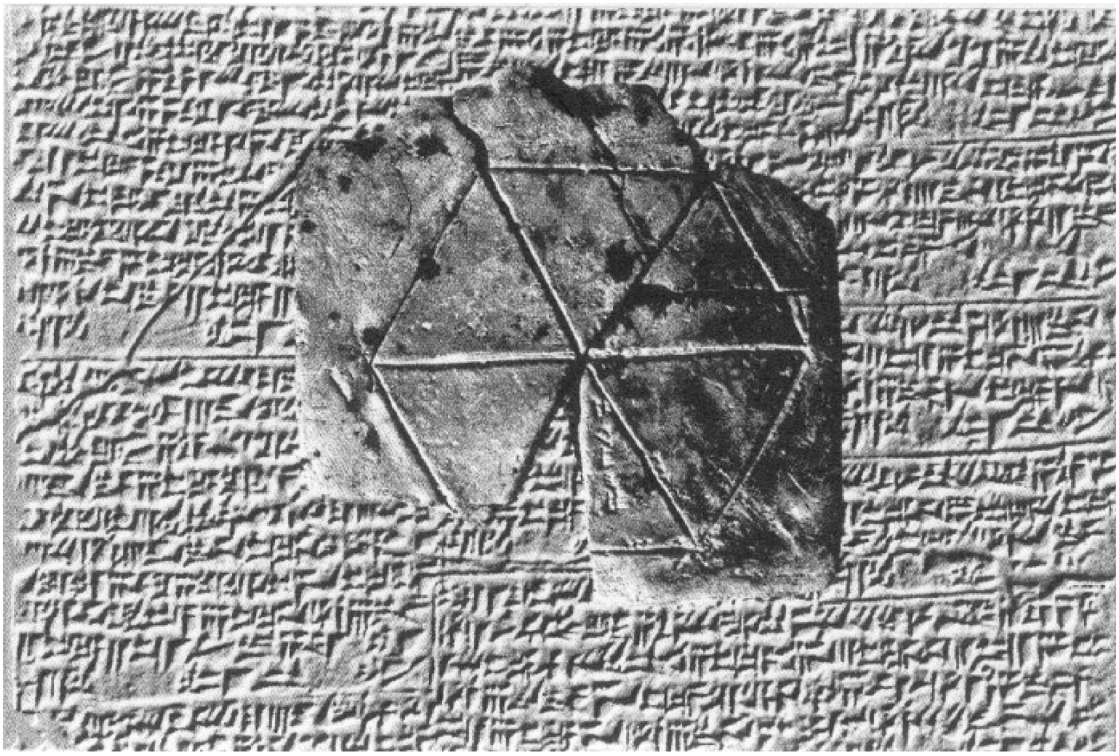
Les plus anciennes valeurs de π dont l'utilisation est attestée chez les civilisations de l'Antiquité sont $\pi = 3$, $\pi = 3 + 1/7$ et $\pi = 3 + 1/8$.

Cette dernière valeur provient d'une tablette babylonienne en écriture cunéiforme, découverte en 1936 et vieille d'environ 4000 ans. Les Babyloniens semblent y être arrivés de la façon suivante : d'une part, ils savaient que le périmètre d'un hexagone vaut trois fois le diamètre de cet hexagone (ce qui est géométriquement évident et justifie une première approximation de π par 3) ; d'autre part, ils estimaient le rapport entre le périmètre d'un cercle de rayon 1 et celui de l'hexagone inscrit à $57/60 + 36/(60)^2$ (valeur sans doute obtenue par une mesure approchée, exprimée dans le système de numération en base 60 alors en usage).

De ces prémisses, on déduit que :

$$\pi = 3/\left(\frac{57}{60}+\frac{36}{3600}\right)=3+\frac{1}{8}$$

Notons qu'une civilisation peut, selon les contextes, utiliser différentes « valeurs » de π, et que tous les géomètres antiques n'avaient pas compris que le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre est égal au rapport de l'aire d'un disque au carré de son rayon.



tablette babylonienne

1.3 Les Egyptiens

Le papyrus de Rhind, découvert en 1855 et conservé au British Museum, contient le texte, recopié vers l'an 1650 avant notre ère par le scribe Ahmès, d'un manuel de problème plus ancien encore (datant sans doute de 1800 avant notre ère). Le calcul mentionné par ce texte implique que π était évalué à $(16/9)^2 = 3{,}160493$.

La méthode indiquée pour calculer la surface d'un disque consiste à effectuer les opérations suivantes :

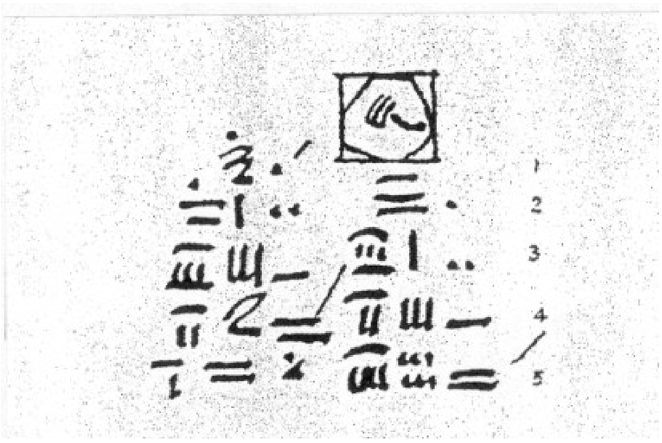
1. Enlever un neuvième au diamètre
2. Multiplier le résultat par lui-même

Ce procédé est remarquablement simple. Traduite en notations modernes, la formule proposée est : $S = (D - D/9)^2$. La formule exacte étant : $S = (D/2)^2\ \pi$, on en déduit que les Egyptiens considéraient implicitement que $\pi = (16/9)^2 = 3{,}160449...$ Nous ne savons pas s'ils avaient conscience que ce n'était qu'une valeur approchée.

La diminution d'un neuvième est meilleure que la diminution d'un huitième. Puisque les Egyptiens ramenaient tous leurs calculs à des inverses de nombres entiers, la formule du papyrus de Rhind est la meilleure parmi celles qu'ils envisageaient. Comment l'ont-ils trouvée ? Nous ne le saurons sans doute jamais avec certitude ; cependant le problème 48 du papyrus de Rhind suggère une piste.

Considérons un octogone (régulier) construit dans un carré de 9 unités de côté. L'aire de cet octogone, que l'on trouve en comptant le nombre de carrés et de demi-carrés de côté 3, égale à 63. Avec nos notations, l'aire du disque (qui apparaît très proche de celle de l'octogone, quoiqu'un peu plus grande) est égale à $(9/2)^2\ \pi$; en remplaçant 63 par 64 (ce qui simplifie les calculs et compense l'aire qui semble manquer à l'octogone), on arrive à $(9/2)^2\ \pi = 64$, c'est-à-dire à $\pi = (16/9)^2$, et donc à la règle de la diminution du neuvième.

Notons pour finir que les Egyptiens connaissaient l'égalité entre le rapport du périmètre d'un cercle à son diamètre et le rapport de la surface d'un disque au carré de son rayon (autrement dit, ils savaient que le « π » de $P = 2\pi.r$ est le même que le « π » de $S = \pi.r^2$). En revanche, ils ne semblent pas avoir connu un énoncé général équivalent au théorème de Pythagore.



Problème 48 du papyrus de Rhind – texte original en hiératique

1.4 La Bible

Un passage de la Bible raconte la construction du temple de Salomon et décrit l'énorme chaudron du fondeur de bronze Hiram. Le texte utilise implicitement la valeur $\pi = 3$. Toutefois, les Hébreux avaient peut-être conscience que 3 n'est qu'une approximation, voire même connaissaient de meilleures valeurs pour π.

Voici le passage concerné dans la Bible (dont on date l'écriture aux alentours de 550 avant J.-C.) :

« Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entoure d'un cordon de trente coudées. »

Quelques siècles plus tard, après la diffusion des merveilles de la géométrie grecque, la valeur donnée à π par la Bible créera de graves cas de conscience. Le rabbin mathématicien Nehémiah, qui vivait en Palestine vers l'an 150 de notre ère, est déchiré entre la valeur biblique de 3 et la valeur de 3 + 1/7 qu'Archimède avait proposé (parmi d'autres, car il savait bien qu'il s'agissait de valeurs approchées). Nehémiah, comprenant sans doute qu'Archimède était le plus proche de la vérité que le passage du texte biblique, tente de s'en sortir en affirmant que la Bible ne se trompe pas, mais qu'elle parle du périmètre intérieur, lequel, compte tenu de l'épaisseur du récipient, peut parfaitement valoir trois fois le diamètre extérieur. On a aussi argué, pour défendre cette hypothèse qui concilie foi et géométrie, que donner le diamètre et le périmètre d'un cercle revient à se répéter, ce que la Bible ne fait certainement pas et qu'en conséquence, il est absurde de lire la Bible autrement que selon l'interprétation de Nehémiah. En Europe, au XVIIIème siècle, d'autres commentateurs soucieux de concilier science et foi prétendront que le chaudron était de forme hexagonale (bien que le texte de la Bible précise sans ambiguïté « toute ronde »). Il semble pourtant clair que, dans le contexte d'artisanat peu précis de l'époque, la valeur approchée $\pi = 3$ était largement suffisante : il n'y a donc pas à justifier la Bible.

Bible – « mer de fonte » du fondeur Hiram

2 Chapitre 2 – L'heuristique archimédienne – Vincent Moreau

2.1 Archimède

Né en 287 avant J.C. et mort en 212 avant J.C. à Syracuse, Archimède fut l'un des plus célèbres mathématiciens de l'Antiquité. Mais les mathématiques n'étaient pas son seul domaine de prédilection, il apparaît aussi comme ingénieur, physicien ou même patriote.

Pour étudier de nombreux problèmes, il séparait rarement les théories mathématiques ou physiques. Ainsi le physicien qui étudiait les lois du levier ou celle de la balance fournit au mathématicien ses plus belles intuitions qui seront ensuite démontrées rigoureusement. Et inversement, toute question pratique étant toujours élevée au plus haut niveau.

Il fut aussi un grand patriote. Il dirigeât en effet, la défense de Syracuse en 215 avant J.C., lors de l'attaque des Romains. Durant trois ans, il tint tête aux Romains, enflammant leurs vaisseaux à l'aide de miroirs ardents, lançant des projectiles à des distances considérables. C'est lors de l'entrée des troupes de Marcellus dans la ville en 212 avant J.C. que Archimède fut tué par un soldat, malgré les ordres donnés pour qu'on l'épargnât.

Archimède a laissé de célèbres études. Parmi elles :

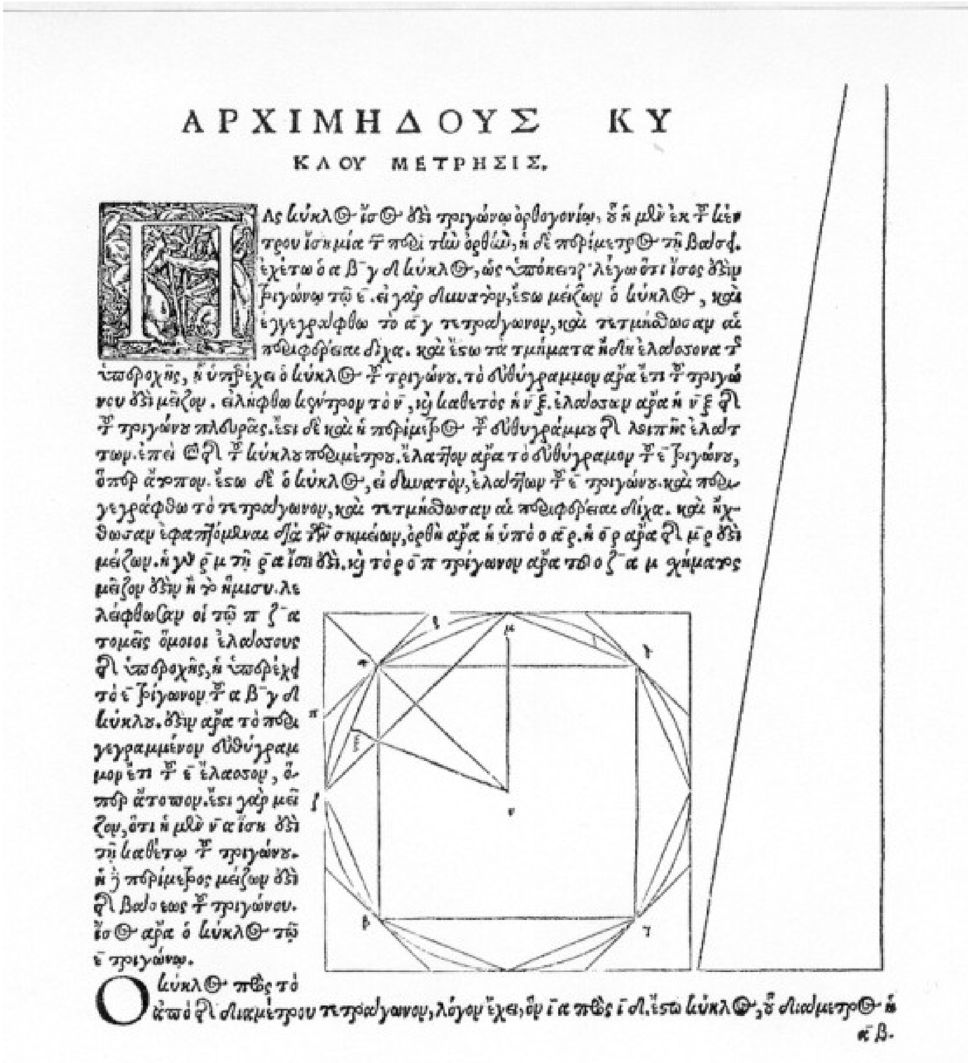
« L'arénaire », où il expose un système de numérations des grands nombres.

« Des corps flottants », où apparaît le célèbre « Principe d'Archimède ».

« De la mesure du cercle », où il exhibe un encadrement de π.

2.2 Les travaux d’Archimède

2.2.1 Traité « de la mesure du cercle »


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ.

« De la mesure du cercle »

Les premières démonstrations relatives au calcul effectif de π se trouvent dans le traité « De la mesure du cercle ». Ce traité se compose de trois propositions dont la dernière donne un encadrement de π.

<u>Première proposition</u> – L’aire d’un cercle est égale à celle d’un triangle rectangle dont un des côtés de l’angle droit est égal au rayon du cercle et l’autre côté de l’angle droit à la circonférence du même cercle.

<u>Principe de démonstration</u>
Utilisation d’un polygone régulier inscrit dans le cercle et d’un polygone régulier circonscrit au cercle.

<u>Vérification</u> (en connaissant π)

$$A_{cercle} = \pi R^2$$

$$\mathsf{A}_{\text{triangle}} = \frac{b \times h}{2} = \frac{R \times 2\pi R}{2} = \pi R^2$$

Donc $\mathsf{A}_{\text{cercle}} = \mathsf{A}_{\text{triangle}}$

<u>Deuxième proposition</u> – Le rapport de l'aire du cercle au carré du diamètre est environ $\frac{11}{14}$.

<u>Vérification</u>

$(\mathsf{A}_{\text{cercle}})/(\text{diamètre})^2 = \frac{\pi R^2}{4R^2} = \frac{\pi}{4}$, d'où $\frac{\pi}{4} \approx \frac{11}{14}$ donc $\pi \approx 3{,}1428$ donc une approximation de π à 10^{-2} près.

<u>Troisième proposition</u> – Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzièmes parties du diamètre.

En d'autres termes :

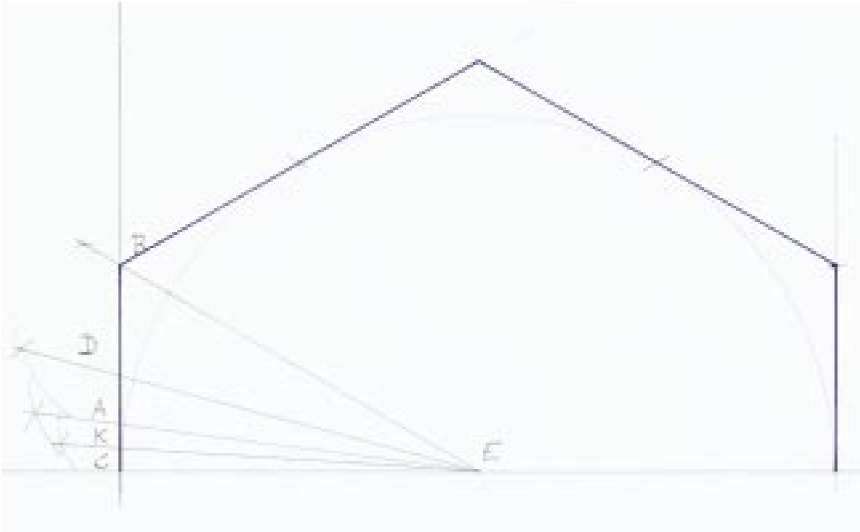
$$\left(3 + \frac{10}{71}\right)d < p < \left(3 + \frac{1}{7}\right)d$$

<u>Principe de démonstration</u>

Voici la méthode d'Archimède pour calculer π. : il considère un cercle de rayon 1 qu'il encadre en dessinant à l'intérieur et à l'extérieur un polygone de 3×2^n côtés.

(i) établissons que $p < \left(3 + \frac{1}{7}\right)d$

- Traçons le cercle de centre E et de rayon CE
- Construisons le triangle rectangle en C tel que $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB}) = -\frac{\pi}{6}$
- Soit D l'intersection de (CB) et de la droite bissectrice de $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EB})$
- Soit H l'intersection de (CB) et de la droite bissectrice de $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{ED})$
- Soit K l'intersection de (CB) et de la droite bissectrice de $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EH})$
- Soit L l'intersection de (CB) et de la droite bissectrice de $(\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{EK})$

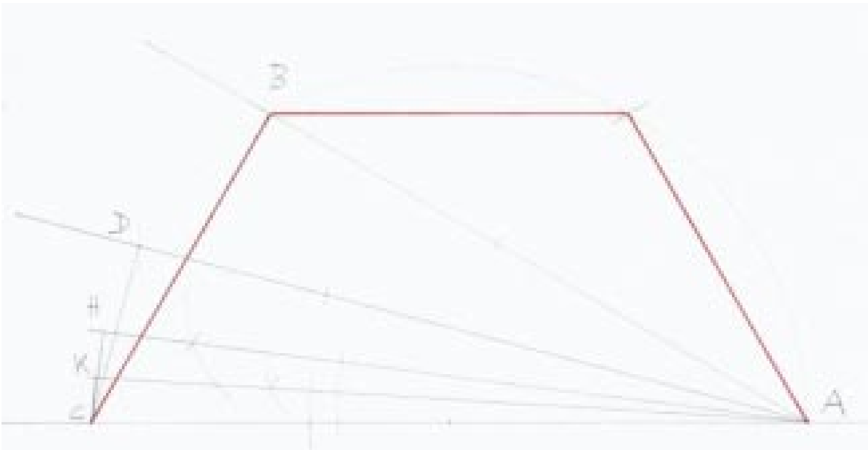


On désigne alors par a_n le demi-côté du polygone régulier, circonscrit au cercle, de n côtés. Alors CB = a_6, CD = a_{12}, CH = a_{24}, CK = a_{48}, CL = a_{96}

On établit des minorations de $\frac{r}{a_n}$ et on obtient $\frac{p}{d} < 3 + \frac{1}{7}$

(ii) établissons que $\left(3 + \frac{10}{71}\right)d < p$

- Traçons un demi-cercle de diamètre AC
- Traçons le triangle rectangle en B inscrit, CBE tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{\pi}{6}$
- Soit D le point du demi-cercle tel que (AD) soit une bissectrice de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$
- Soit H le point du demi-cercle tel que (AD) soit une bissectrice de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$
- Soit K le point du demi cercle tel que (AD) soit une bissectrice de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$
- Soit L le point du demi cercle tel que (AD) soit une bissectrice de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AK})$



On désigne alors par b_n le demi côté du polygone régulier, circonscrit au cercle, de n côtés. Alors CB = b_6, CD = b_{12}, CH = b_{24}, CK = b_{48}, CL = b_{96}

On établit des majorations de $\frac{d}{b_n}$ et on aboutit à $3 + \frac{10}{71} < \frac{p}{d}$

Vérification

On a $\frac{p}{d} = \frac{2\pi R}{2R} = \pi$, d'où $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$

$3{,}1408 < \pi < 3{,}1429$

Bilan

Archimède obtient donc un encadrement de π très précis. Ce résultat est stupéfiant car la méthode géométrique d'Archimède fait appel à des raisonnements purement géométriques, sans notations algébriques ni trigonométriques.

En notation « modernes » en notant α_n le demi-périmètre du polygone circonscrit et β_n celui du polygone inscrit, on obtient :

$$\alpha_1 = 2\sqrt{3} \qquad \beta_1 = 3$$

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{2}{\alpha_{n+1}} \qquad \alpha_{n+1} \times \beta_n = (\beta_{n+1})^2$$

Le calcul d'Archimède correspond aux évaluations (calcul des racines carrées) de α_5 et β_5.

En prenant un rayon égal à 1 on obtient :

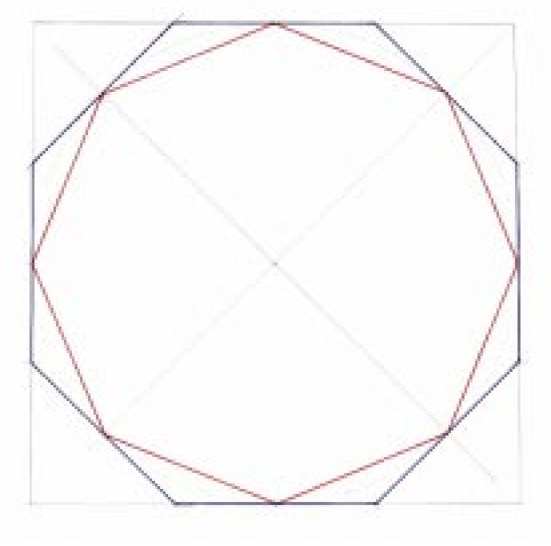
$$\alpha_n = 3 \times 2^n \tan(\frac{\pi}{3 \times 2^n}) \qquad \beta_n = 3 \times 2^n \sin(\frac{\pi}{3 \times 2^n})$$

2.2.2 Méthode des polygones

Après avoir obtenu un encadrement de π, Archimède va approximer le nombre grâce à la méthode des polygones.

- Considérons un cercle de diamètre 1
- Commençons à inscrire dans le cercle un polygone régulier à huit côtés puis par circonscrire au cercle un autre polygone régulier à huit côtés

On recommence l'opération avec des polygones à n côtés.



On note p'_n le périmètre du polygone inscrit et p_n le périmètre du polygone circonscrit. On établit une relation de récurrence entre p'_n et p_n et entre p'_n et p'_{2n} en utilisant des considérations géométriques : $p_n = \dfrac{np'_n}{\sqrt{n^2 - (p'_n)^2}}$ et $p'_{2n} = 2n[n - \sqrt{n^2 - (p'_n)^2}]$

On obtient alors les résultats :

n	p'_n	p_n
8	3,06146	3,31370
13	3,12144	3,18259
32	3,13654	3,15172
64	3,14033	3,14411
128	3,14127	3,14222
256	3,14151	3,14175
512	3,14157	3,14162
1024	3,14159	3,14160

Bilan

Grâce à la méthode des polygones Archimède arriva, lui, a une approximation de $\pi \approx 3{,}14187$, exacte à 10^{-3} près

2.3 Autres approximations de π obtenues par la méthode des polygones

A partir de la même méthode qu'Archimède, de nombreux mathématiciens ont amélioré l'approximation de π.

En 263, le mathématicien chinois Liu Hui étudie, comme Archimède, un polygone de 192 côtés et propose l'encadrement :

$3{,}141024 < \pi < 3{,}142704$

puis avec un polygone de 3072 côtés, trouve $\pi = 3{,}14159$.

En Inde, « L'Aryabhatiya », écrit par Aryabhata en 499, utilise la valeur 3,1416. On pense qu'elle fut obtenue à partir de polygones, par une méthode semblable ou même identique à celle d'Archimède.

Vers 1450, Al-Kashi, astronome à Samarkand dont il dirige l'observatoire, calcule π avec 14 décimales par la méthode des polygones d'Archimède. Plus précisément, il utilise la formule de récurrence qui donne le côté d'un polygone à p côtés

$$s(6) = 1 \qquad s(2p) = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (s(p))^2}}$$

Il mène son calcul en utilisant 27 fois la formule, ce qui revient à considérer le périmètre d'un polygone de 3×2^{28} côtés.

Ludolf von Ceulen (vers 1539-1610) utilise la méthode d'Archimède. Il calcule 20 décimales de π en 1596 avec un polygone de 60×2^{33} côtés, puis 34 décimales en 1609.

3 Chapitre 3 – Les formules infinies – Bertrand Germain

3.1 Historique

Depuis les premières approximations de π par les Grecs ou les Babyloniens les travaux sur ce nombre se faisaient essentiellement sous l'aspect géométrique.

Mais avec l'invention du calcul infinitésimal vers 1650,par Newton et Leibnitz (chacun en revendique la découverte), l'étude de π va prendre une autre tournure. En effet pour la première fois π est donné sous la forme d'une série et donc sous la forme d'un produit ou d'une somme d'une infinité de termes.

Le premier mathématicien à avoir donné une telle formule est Viète qui trouve la formule suivante :

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}$$

Wallis qui a cherché l'aire d'un demi-disque à partir de l'équation cartésienne du cercle obtient une formule très simple mais avec une convergence lente :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{(2.2).(4.4).(6.6).(8.8)\ldots}{(1.3).(3.5).(5.7).(7.9)\ldots} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

Il est suivit par son ami Lord Brounker qui obtient une très belle formule :

$$\pi = 4\frac{1}{1+\frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\ldots}}}}$$

La chasse aux décimales est lancée ! L'invention du calcul infinitésimal coïncide avec celle du calcul différentiel qui va donner les plus belles formules de π grâce au développement en séries de fonctions et particulièrement celui d'arctangente (Gregory) et d'arcsinus (Newton). En particulier, grâce aux développements limités, John Machin obtient une formule restée célèbre :

$$\pi = 4(4\mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{5}) + \mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{239})) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(4\left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}\right)$$

En continuant l'histoire de π on tombe ensuite sur Euler qui a été très prolifique en fournissant plusieurs dizaines de formules. Dont une des plus célèbre est

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

3.2 Les mathématiciens qui ont marqués cette époque

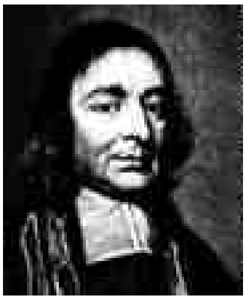
François Viète (1540-1603)

Il a marqué son époque en ayant occupé des fonctions politiques importantes sous Henry IV. Mais il n'est connu aujourd'hui que pour ses travaux mathématiques. Il est en effet l'inventeur du calcul algébrique en ayant substitué pour la première fois les lettres aux grandeurs. On lui doit aussi les termes de «coefficients » et «analytiques ».

Concernant π le seul travail marquant qu'il ait laissé est sa «formule analytique » donnée dans le premier paragraphe :

$$\pi=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}.\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ldots}$$

John Wallis (1616-1703)



Professeur à Oxford, il a déplacé la recherche en mathématiques du vieux continent en Grande-Bretagne. Il a eu une intuition et une imagination remarquable sur les séries et les produits infinis au moment où on ne connaissait rien dans ce domaine. Il nous a en particulier laissé les signes «x», «<», «>».

Sur π, la seule formule qu'il ait laissée est la suivante

$$\frac{\pi}{2}=\frac{(2.2).(4.4).(6.6).(8.8)\ldots}{(1.3).(3.5).(5.7).(7.9)\ldots}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2}{4n^2-1}$$

James Gregory (1638-1675)

Il étudie les nouveaux problèmes liés au calcul infinitésimal et il les applique à π.

Sur ce nombre il trouve le développement limité de la fonction arctangente qui va être à l'origine de nombreuses formules sur π.

$$\mathrm{Arc}\tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (x \in \,]-1,1])$$

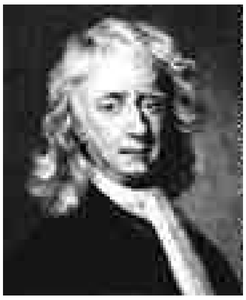
Gottfried Leibnitz (1646-1716)

Comme Viète il occupe des fonctions diplomatiques importantes. Il étudie de nombreux domaines tels que les mathématiques, la mécanique, la théologie, etc… Il est avec Newton à la base du calcul différentiel (il a peut-être été inspiré par Descartes). L'infini et les limites entrent souvent dans ses calculs.

Sur π il se sert du développement de la fonction arctangente découvert par Gregory en remplaçant x par 1 :

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arc}\tan(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \ldots$$

Isaac Newton (1642-1727)



Célèbre surtout pour ses travaux en physiques et en particulier pour la loi de l'attraction universelle, lui aussi est à l'origine du calcul différentiel (d'où des frictions avec Leibnitz).

Autour de π : en partant de la formule

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Arc}\sin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et du binôme de Newton, il obtient le développement d'arcsinus et en remplaçant x par **Erreur !** :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{2^3} + \frac{13}{24}\frac{1}{5}\frac{1}{2^5} + \ldots$$

Leonhard Euler (1707-1783)

Il a beaucoup travaillé tout au long de sa vie, et pour preuve il a publié 75 volumes ! ! Rien qu'en mathématiques il a étudié la géométrie infinitésimale, analytique, plane, la topologie, la combinatoire, la logique, l'analyse, la théorie des nombres, …

Il a sûrement été le plus prolifique sur π. Grâce aux équations différentielles et aux intégrales, il obtient plusieurs dizaines de formules :

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Il utilise également des formules d'arctan dont il tire :

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{2}) + \mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{3})$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{7}) + 2\mathrm{Arc}\tan(\frac{3}{79})$$

Il en a trouvé des dizaines d'autres dont chacune a ses avantages de calculs.

John Machin (1680-1751)

Assez peu connu il s'est servi lui aussi du développement d'arctan pour calculer π à partir de

$$4\mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{5}) - \mathrm{Arc}\tan(\frac{1}{239})$$

formule qui lui a permis d'être le premier à calculer 100 décimales.

3.3 Etude de quelques formules

Formule d'Euler : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Ce problème a préoccupé plusieurs grands mathématiciens, dont Bernoulli, Euler fut le premier à trouver cette valeur.

Considérons de développement de sinus :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots$$

Donc $\dfrac{\sin(x)}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} - \dfrac{x^6}{7!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k+1)!} + \ldots$

D'où $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 1 - \dfrac{x}{3!} + \dfrac{x^2}{5!} - \dfrac{x^3}{7!} + \ldots + (-1)^k \dfrac{x^k}{(2k+1)!} + \ldots = Q(x)$

Euler savait que la somme des inverses des racines de $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ vaut $-a_1$. Il saut grâce à la périodicité de sinus que Q s'annule pour $\{\pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \ldots, k^2\pi^2, \ldots.\}$.

Euler se dit alors que la propriété qui est vraie pour un polynôme fini doit l'être aussi pour un polynôme infini et il en déduit $\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{1}{4\pi^2} + \dfrac{1}{9\pi^2} + \ldots + \dfrac{1}{k^2\pi^2} + \ldots = -a_1 = \dfrac{1}{3!}$ soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Il est intéressant de noter que ce raisonnement non uniforme est basé sur un principe faux, à savoir l'identification d'une série et d'un polynôme, qui se trouve finalement être l'idée la plus efficace pour résoudre et comprendre la valeur de la constante.

<u>Formules de Machin</u> : $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arc}\tan(\dfrac{1}{5}) + \operatorname{Arc}\tan(\dfrac{1}{239})$ – 1706

En appliquant deux fois la formule $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$, on trouve

$$\tan\left(2\operatorname{Arc}\tan(\frac{1}{5})\right) = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12} \text{ puis } \tan\left(4\operatorname{Arc}\tan(\frac{1}{5})\right) = \frac{\frac{10}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$$

En appliquant la formule $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$, on trouve

$$\tan\left(4\operatorname{Arc}\tan(\frac{1}{5}) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239}$$

et donc : $\dfrac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arc}\tan(\dfrac{1}{5}) + \operatorname{Arc}\tan(\dfrac{1}{239})$

4 Chapitre 4 – La quadrature du cercle – Antoine Riche

4.1 Les constructions à la règle et au compas

Les courbes les plus simples qui interviennent en géométrie sont la droite et le cercle et les instruments les plus simples pour les construire sont la règle et le compas. Cette raison de bon sens permet de comprendre pourquoi les Grecs ont considéré les constructions à la règle et au compas mais elle n'explique pas pourquoi ils y étaient attachés si profondément.

En effet, il faut évoquer au quatrième siècle avant J.C. l'influence de Platon (423-348) et de son école l'Académie. Pour lui, les figures que l'on trace ne sont qu'un pâle reflet de la réalité qui, elle, appartient au monde des idées. Ces conceptions l'amènent à avoir peu d'estime pour les instruments de mesure ou de constructions nécessairement imparfaits. Il fait toutefois une exception pour la règle et le compas qui sont les seuls, à ses yeux, à pouvoir respecter la symétrie des configurations. L'influence de Platon, qui fut considérable à son époque et pendant les siècles qui ont suivi, se retrouve chez Euclide qui dans ses Eléments ne s'écarte pas des prescriptions du philosophe.

Enfin nous pouvons évoquer la recherche du statut de nombres. Pour les mathématiciens grecs avant Archimède, la notion de nombre était entièrement liée à des idées géométriques. Les pythagoriciens connaissaient les fractions d'entiers naturels et pensaient que l'on pouvait mesurer tous les segments à l'aide de ces fractions, mais les conséquences du théorème de Pythagore (vers 550 avant J.C.) allaient provoquer une crise. On découvrit des segments incommensurables à l'aide des fractions. Il fallait donc accepter de nouveaux nombres. Or les segments les représentants étaient constructibles à la règle et au compas. On peut donc penser que les constructions à la règle et au compas ont été mises en avant pour servir de caution géométrique aux nouveaux nombres mis en évidence par le théorème de Pythagore.

<u>Définitions</u>

Un point M est constructible à la règle et au compas si on peut construire M en un nombre fini d'étapes à partir d'un ensemble M_1 réduit à deux points distincts O et I.

Un nombre réel est constructible si sa valeur absolue est la longueur d'un segment constructible.

Un nombre complexe z est constructible si et seulement si x = Re(z) et y = Im(z) sont constructibles.

4.2 Quatre problèmes grecs

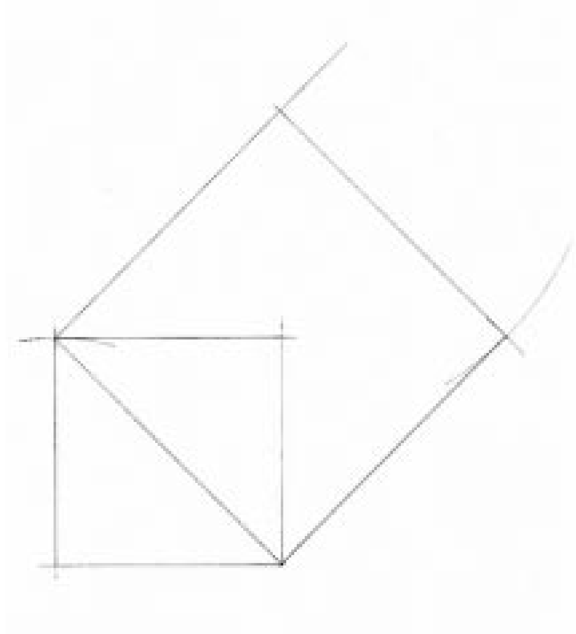
Dès le cinquième siècle avant J.C. sont apparus des problèmes que l'on n'arrivait pas à résoudre à la règle et au compas. Ces problèmes ne tardèrent pas à devenir célèbre après les échecs de mathématiciens réputés. Parmi ces problèmes nous en retiendrons quatre : la quadrature du cercle, la duplication du cube, la trisection de l'angle et nous y ajouterons le problème des polygones réguliers.

L'intérêt de ces problèmes pourrait paraître aujourd'hui bien relatif et leur difficulté assez limitée, au vu de la complexité et la longueur des démonstrations récentes de certains théorèmes, comme celle de A. Wiles du grand théorème de Fermat.

Mais, comme ce dernier, ils ont eu une influence considérable sur l'évolution des mathématiques et sur la vie même des mathématiciens.

La duplication du cube

La duplication du cube consiste à construire à la règle et au compas l'arrête d'un cube ayant un volume deux fois plus grand que le volume d'un cube donné. Ce problème a dû se poser de façon assez naturelle puisqu'il est facile à la règle et au compas d'effectuer la duplication du carré. Il suffit en effet de construire un nouveau carré ayant pour côté une diagonale du premier.



duplication du carré

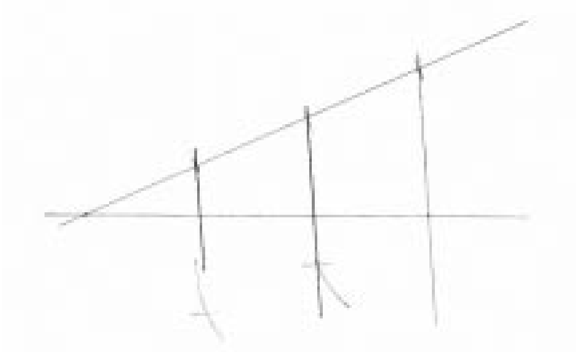
Une légende, rapportée dans une lettre d'Eratosthène (deuxième siècle avant J.C.), explique l'origine de la duplication du cube de la façon suivante. La peste régnait à Délos. L'oracle consulté déclara qu'Apollon voulait qu'on lui érigeât un temple double du temple cubique qui lui était consacré. On construisit un temple de côté double, la peste continua. L'oracle à nouveau consulté déclara qu'Apollon n'avait pas eu satisfaction et qu'il voulait un temple exactement double de l'ancien. A cause de cette légende, la duplication du cube porte le nom de problème de Délos.

La duplication du cube revient à construire un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$ c'est à dire de trouver un nombre constructible x tel que $x^3 = 2$.

La trisection de l'angle

La trisection de l'angle consiste à construire à la règle et au compas les demi-droites partageant un angle quelconque en trois angles égaux. Ce problème est assez naturel puisque l'on savait à la règle et au compas construire la bissectrice d'un angle. On peut aussi y voir une analogie avec le problème élémentaire qui consiste à trisecter un segment.

bissection de l’angle

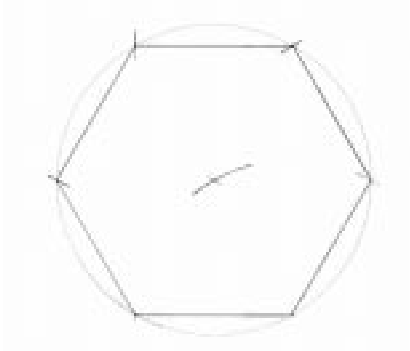


trisection du segment

La trisection de l'angle α revient à trouver un nombre constructible $x = \cos(\theta)$ tel que $\cos(3\theta) = \cos(\alpha)$ i.e. $x^3 - 3x - \cos(\alpha) = 0$.

Le problème des polygones réguliers

Le problème des polygones réguliers consiste à construire à la règle et au compas pour chaque $n \geq 3$ un polygone régulier ayant n cotés. Ce problème fit moins parler de lui dans l'antiquité. Dans ses éléments Euclide donne les constructions de polygones réguliers à 3, 4, 5, 6, 15 cotés et il signale comment doubler le nombre de cotés d'un polygone.



polygone régulier à 6 cotés

Construire un polygone régulier à n côté équivaut à construire un angle de mesure $\frac{2\pi}{n}$ i.e. de savoir si $e^{\frac{2i\pi}{n}}$ est constructible ou non.

Posés au cinquième siècle avant J.C., il aura fallu attendre 1837 pour avoir une réponse précise à ces trois problèmes. Confiants dans la règle et le compas, qui dans d'autres constructions leur avaient fourni des solutions élégantes, les mathématiciens grecs n'ont jamais envisagé l'impossibilité des constructions demandées. Il en sera d'ailleurs de même pour la plupart de leurs successeurs. Pourtant les mathématiciens grecs connaissaient la démonstration par l’absurde, c’est à eux que l’on doit la démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

En fait la duplication du cube ne peut pas être effectuée à la règle et au compas. Il en est de même pour la trisection d'un angle quelconque, par exemple un angle de 60 degrés. Enfin certains polygones réguliers, comme par exemple le polygone régulier à 7 côtés, ne sont pas constructibles.

En fait les constructions à la règle et au compas ont une signification algébrique profonde : ce sont celles qui sont équivalentes à une suite finie d'équations du premier ou du second degré.

Cependant, avant d'en arriver à cette conclusion, les mathématiciens devront d'abord reconnaître et maîtriser complètement le lien entre les nombres et la géométrie.

Ces résultats ont été obtenus grâce au travaux de trois mathématiciens.

En 1637, René Descartes (1596-1650) parle du lien qui existe entre les constructions à la règle et au compas et la résolution des équations du premier et du second degré. Il y a dans son travail, en germe, l'impossibilité de la duplication et de la trisection.

En 1796, Karl Friedrich Gauss (1777-1855) montre que le polygone régulier à 17 côtés est constructible à la règle et au compas. Il énonce aussi une condition nécessaire et suffisante pour que le polygone régulier à n côtés soit constructible :

Les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas sont ceux dont le nombre de côté n est de la forme 2^{α} avec $\alpha \geq 2$ ou de la forme $(2^{\alpha})p_1p_2...p_r$ avec a dans N et où les p_k sont des nombres premiers distincts qui sont des nombres de Fermat (de la forme $2^{2^n}+1$).

Il démontre seulement que sa condition est suffisante.

En 1837 Pierre Laurent Wantzel (1814-1848), en utilisant le langage des équations algébriques de Niels Henrik Abel (1801-1829), précise les travaux de Descartes et donne une caractérisation algébrique des coordonnées des points que l'on peut construire à la règle et au compas. De cette caractérisation résultent l'impossibilité de la duplication du cube et de la trisection de l'angle et la démonstration complète de la condition de Gauss caractérisant les polygones réguliers constructibles.

4.3 La quadrature du cercle

La quadrature du cercle consiste à construire à la règle et au compas un carré ayant même aire qu'un cercle donné, c'est à dire de trouver un nombre constructible x tel que $x^2 = \pi$.

Des quatre problèmes énoncés le plus célèbre est sans aucun doute la quadrature du cercle. L'expression « c'est la quadrature du cercle » est même passée dans le langage courant pour désigner une chose impossible. Le problème était déjà célèbre au cinquième siècle avant J.C. puisque Aristophane y fait allusion dans ses pièces. Le mot quadrature est encore utilisé de nos jours en mathématiques pour désigner un calcul d'aire et par extension un calcul d'intégrale. En fait, même pour les Grecs de l'antiquité c'était bien le calcul de l'aire du cercle qu'il fallait obtenir. Mais comme ils avaient une mauvaise connaissance du nombre π, ils voulaient ramener le calcul de l'aire du disque à un calcul plus simple, celui de l'aire du carré.

En fait le problème consistant à ramener l'aire d'un cercle à celle d'un carré est très ancien. On le trouve déjà consigné dans un document égyptien de 1650 avant J.C., le papyrus Rhind, écrit par le scripte Ahmès. On peut lire : « construire un carré équivalent à un cercle.

Réponse. Retirer 1/9 au diamètre et construire le carré sur ce qui reste ». (Implicitement, ce calcul fournit une valeur de $\pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} \approx 3{,}16$.)

Antiphon, contemporain de Socrate, proposa la méthode suivante :

On circonscrit un polygone à un cercle, et l'on double le nombre de côtés plusieurs fois... Comme l'on sait construire un carré de même aire qu'un polygone et que celui-ci tend à se confondre avec le cercle lorsque le nombre de ses côtés augmente, la quadrature du cercle semble résolue pour n'importe quelle précision.

On sait bien sûr aujourd'hui que ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour tout n entier qu'elle l'est à la limite.

Ce processus est très intéressant car il va conditionner la méthode d'approximation de Pi qui va dominer pendant 2000 ans.

Ne parvenant pas à résoudre le problème, certains mathématiciens obtinrent des solutions en utilisant en plus de la règle et du compas des courbes et des surfaces, comme Dinostrate (deuxième siècle avant J.C.) et la quadratrice.

Archimède (troisième siècle avant J.C.) eut une attitude originale en s'attaquant au véritable problème sous jasent à la quadrature : peu importe les constructions exactes à la règle et au compas, ce qui est important c'est d'avoir une bonne approximation de π.

Après la période féconde de l'antiquité grecque, c'est la nuit totale pendant plusieurs siècles. Au seizième siècle l'engouement pour les problèmes de constructions reprend. Charles Quint crée même un prix pour récompenser la quadrature du cercle.

En 1668 le mathématicien écossais James Gregory (1638-1675) est le premier à publier une démonstration de l'impossibilité de la quadratrice. Malheureusement, comme il le reconnut plus tard sa démonstration est incorrecte.

En 1775 l'Académie des Sciences de Paris, submergée par les manuscrits de quadrateurs de toutes sortes, refuse désormais de lire ce genre de travaux.

En 1837 Wantzel donne une démonstration de l'impossibilité de la duplication et de la trisection. Cet article permit aussi de mieux situer le problème de la quadrature du cercle : ce n'est pas la valeur de π qui importe mais sa nature. Est-il algébrique ou transcendant ? Si la quadrature du cercle est possible, π serait exprimable par radicaux, et donc serait algébrique.

La réponse à cette question a été précédée d'autres résultats intéressants. En 1761 Johann Heinrich Lambert (1728-1777) démontre que π est irrationnel, en 1794 Adrien-Marie Legendre (1752-1833) démontre que π^2 est irrationnel, en 1844 Joeph Liouville (1809-1882) démontre l'existence de nombres transcendants, il en construit même une infinité, et en 1873 Charles Hermite démontre que e est transcendant.

C'est en 1882, soit après 24 siècles d'étude, Ferdinand Lindemann (1852-1939) démontre le résultat suivant :

Quels que soient les nombres algébriques $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, avec $a_k \neq 0$ et les b_i distincts deux à deux, on a :

$$a_1 e^{b_1} + a_2 e^{b_2} + \ldots + a_n e^{b_n} \neq 0$$

On en déduit que si π était algébrique, $i\pi$ le serait aussi, et on ne pourrait avoir la relation due à Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$. Donc π est transcendant et donc la quadrature du cercle est impossible.

5 Chapitre 5 – Les calculs de l'extrême – Antoine Riche

Alors que les recherches sur π se sont un peu essoufflées au début du XXe siècle après la découverte de la transcendance et à cause de la théorie des ensembles de Cantor et des problèmes de Hilbert qui occupent les mathématiciens, un autodidacte indien, Ramanujan, va relancer l'intérêt sur π.

5.1 Ramanujan

Srinivasa Ramanujan est né le 22 décembre 1887 au sud de l'Inde dans une famille pauvre. Son père était comptable. Sa précocité mathématique est vite reconnue et à sept ans, il obtient une bourse au lycée de Kumbakonam. On dit qu'il récitait des formules mathématiques à ses camarades d'école et qu'il savait notamment un grand nombre de décimales de π ! Dès le début de son étude de la trigonométrie, il découvrit les cosinus et sinus, trouva les relations qui les unissent et se montra fort déçu en apprenant qu'elles étaient déjà connues ! A 12 ans, Ramanujan maîtrisait ainsi un ouvrage dense : la « Trigonométrie plane » de Loney. A 15 ans, il se procura « Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics » de G.S.Carr, une liste de 6165 théorèmes énoncés souvent sans démonstration. On suppose que c'est de ce livre qu'il tira ses inspirations et son habitude de ne pas livrer de preuves avec ses résultats. Il était d'ailleurs à cette époque tant obnubilé par ses recherches qu'il échoua à ses examens ! Heureusement, après son mariage en 1909, il reçut une somme mensuelle d'un riche mécène passionné de mathématiques sur les recommandations des mathématiciens indiens qui appréciaient les découvertes déjà transcrites dans ce que l'on appelle communément ses carnets.

Ayant obtenu un emploi stable en 1912 comme fonctionnaire au comptoir de Madras, il fut encouragé par ses dirigeants à envoyer ses résultats à 3 éminents mathématiciens britanniques, parmi lesquels seul Godfrey Hardy (1877-1947) répondit à sa lettre du 16/01/1913. En effet, lorsque Hardy et son collègue John Littlewood (1885-1977) s'attaquèrent aux quelques 120 formules et théorèmes envoyés par Ramanujan, leur conviction fut faite quelques heures plus tard : ils avaient affaire à un génie ! (Hardy avait construit une « échelle des capacités pures » sur laquelle il se situait lui-même à 25, attribuait 30 à Littlewood, et 80 à Hilbert, figure rayonnante des mathématiques allemandes du début du siècle. Ramanujan fut immédiatement estimé à 100 !).

Hardy décrivit d'ailleurs la découverte intellectuelle de Ramanujan et ses conséquences comme le seul événement « romantique » de sa vie... Lorsqu'il se pencha sur les formules de Ramanujan, il en fut déconcerté et ne sut pas comment les démontrer. Pourtant, affirmait-il, « elles devaient être vraies car si elles ne l'étaient pas, personne au monde n'aurait eu assez d'imagination pour les inventer ! ». Il fit venir Ramanujan en Angleterre et travailla avec lui très fructueusement les cinq années suivantes sur les propriétés de plusieurs fonctions arithmétiques. Ramanujan devint même le premier Indien membre de la Royal Society en 1918 et du Trinity College.

Malheureusement, Ramanujan était strictement végétarien (à cause d'une promesse faite à sa mère), et dans une Angleterre en pleine guerre, ses besoins étaient difficiles à satisfaire... Après la guerre, en 1919, il revint en Inde gravement malade d'une tuberculose et d'une carence en vitamines. Son travail resta de grande qualité malgré ses souffrances, mais il s'éteignit finalement le 26 avril 1920 à 32 ans.

Ramanujan était un passionné de π. Il a consigné ses travaux dans des carnets : « Ramanujan’s Note Books ».La plupart des formules sont écrites dans des notations non standard et sans démonstrations. Depuis 80 ans, plusieurs mathématiciens (Bruce Berndt actuellement) tentent de déchiffrer ces livres codés pour le plus grand bonheur de la Science !

5.2 Les premiers ordinateurs

Entre 1920 et 1976, pas de progrès théoriques concernant π. Bien sûr, l'apparition des ordinateurs permet enfin de dépasser en 1945 le vieux record de W. Shanks et de se rendre compte d'ailleurs que le calcul de ce dernier... était faux ! Sur les 707 décimales qu'il avait fournies, seules 527 étaient justes.

Le record de 1946 par Ferguson s'effectua sur un calculateur de bureau à l'aide d'une des formules d'arctangente. Et tous les records qui vont suivre utiliseront la même méthode pendant encore trente ans... Et ils vont se succéder à un rythme assez soutenu puisque des 536 décimales de Ferguson, et aux 2037 décimales calculées sur l'ENIAC, premier véritable ordinateur, en 1949, on arrive à 1 million de décimales en 1973 avec Guilloud. On suit là simplement les progrès des ordinateurs mais la méthode n'a pas changé : on utilise toujours la formule de Machin ou bien ses dérivées.

5.3 L’utilisation des formules de Ramanujan

La formule suivante fut découverte vers 1910 par Ramanujan, puis publiée en 1914 :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$$

Avec cette formule, chaque terme supplémentaire donne huit décimales exactes nouvelles :

R(0) = 3,141592730013305660313996189025215518600
R(1) = 3,141592653589793877998905826306013094218
R(2) = 3,141592653589793238462649065702758898156
R(3) = 3,141592653589793238462643383279555273161
R(4) = 3,141592653589793238462643383279502884197

Comme à son habitude, Ramanujan ne donna pas de démonstration de sa formule. Celle-ci parut pour la première fois en 1987 dans le libre de Jonathan et Peter Borwein, qui détaille et éclaire le travail de Ramanujan sur les équations modulaires. C'est avec elle qu'en 1985, W. Gosper calcula 17 millions de décimales de π.

La formule suivante a été élaborée dans le même esprit que la formule de Ramanujan et utilisée en 1994 par les frères Chudnovsky pour calculer quatre milliards de décimales de π :

$$\pi = \left(12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (13591409 + 545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \right)^{-1}$$

RC(0) = 3,141592653589734207668453591578298340762233260915
RC(1) = 3,141592653589793238462643383587350688475866345996
RC(2) = 3,141592653589793238462643383279502884197167678854
RC(3) = 3,141592653589793238462643383279502884197169399375

Cette formule donne 14 chiffres supplémentaires exacts à chaque nouveau terme. La suivante, proposée en 1989 par les frères Borwein, donne 25 décimales exactes supplémentaires par terme calculé :

$$\pi = \left(12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (6k!)(A + Bk)}{(3k)!(k!)^3 C^{k+1/2}} \right)^{-1}$$

avec : $A = 212\,175\,710\,912\sqrt{61} + 1\,657\,145\,277\,365$

$B = 13\,773\,980\,892\,672\sqrt{61} + 107\,578\,229\,802\,750$

$C = [5\,280(236\,674 + 30\,303\sqrt{61})]^3$

5.4 Le calcul isolé des chiffres de π

Calculer les décimales, ce n'est pas tout : si l'on peut atteindre n'importe laquelle de ces décimales sans avoir besoin de calculer les précédentes, c'est un grand progrès également.

Plouffe, le 19 septembre 1995 à 0h29, après des mois de recherche à tâtons, trouve avec David Bailey et Peter Borwein la formule BBP :

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

Cette formule permet de calculer en base hexadécimale ou binaire n'importe quel digit de π en un temps là encore quasi-linéaire (n*log(n)). D'autres formules similaires apparaissent alors pour les logarithmes. La voie est tracée. Les records ont rapidement fusé ! Du trio Bailey-Borwein-Plouffe qui atteint le milliardième digit en binaire, à Fabrice Bellard, un étudiant français qui réussit à atteindre le 1000 milliardième digit en septembre 1997 pour finir avec Colin Percival qui atteint le 40 000 milliardième digit en février 1999, où va-t-on s'arrêter ?

5.5 *Le summum : la moyenne arithmético-géométrique*

En 1976, Eugène Salamin et Richard Brent publient, indépendamment l'un de l'autre, un article sur une nouvelle méthode de calcul des décimales de π.

Il s'agit d'utiliser la moyenne arithmético-géométrique étudiée par Gauss (mais il n'eut pas conscience de l'intérêt de son travail pour le calcul de π)

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad s_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \qquad c_{n+1} = a_n^2 - b_n^2 \qquad s_{n+1} = s_n - 2^n c_n$$

$$p_n = \frac{2a_n^2}{s_n}$$

Pour utiliser un tel algorithme, on commence par initialiser a_0, b_0, s_0 puis on calcule successivement a_1, b_1, c_1, s_1, p_1 puis a_2, b_2, c_2, s_2, p_2, etc. Les nombres p_1,p_2, … sont des approximations de plus en plus fines de π. Pour économiser du temps, on peut ne calculer que le dernier des p_i, car les autres p_i ne servent pas au déroulement des calculs.

Les p_n convergent quadratiquement vers π : le nombre de décimales exactes obtenues double à chaque itération. Avec 25 itérations on obtient 45 millions de décimales exactes (à condition bien sûr d'avoir calculé dès le départ avec 45 millions de décimales, ce qui n'est pas si simple !). Voici le résultat des premières itérations :

p_1 = 3,187672642712108627201929970525369232650
p_2 = 3,141680293297653293918070424560009382790
p_3 = 3,141592653589793238466360602706631321770
p_4 = 3,141592653589793238462643383279502884278

Des algorithmes d'ordre 3 (triplement du nombre de décimales à caque itération supplémentaire), d'ordre 4 et même d'ordre 9 ont été proposées par J. et P. Bornwein. La théorie de ces algorithmes est liée aux travaux de Ramanujan sur les identités modulaires.

Voici un algorithme d'ordre 4 dû aux frères Bornwein :

$$a_0 = 6 - 4\sqrt{2} \qquad y_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$y_{k+1} = \frac{1-(1-y_k^4)^{1/4}}{1+(1-y_k^4)^{1/4}}$$

$$a_{k+1} = a_k(1+y_{k+1})^4 - 2^{2k+3} y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2) \qquad p_k = a_k^{-1}$$

La seizième itération donnerait plus de 10 milliards de décimales.

Récemment, les frères Borwein ont prouvé qu'il existait des algorithmes d'ordre m pour tout m. Toutefois il n'est pas certain que des algorithmes d'ordre élevé soient vraiment utiles : quand m augmente, la suite p_k converge plus vite, mais la complexité des calculs nécessaires pour avancer d'une itération est plus importante : seule l'expérience permet de conclure, et elle semble pour l'instant indiquer que l'algorithme quartique (d'ordre 4) indiqué ci-dessus est le meilleur.

Dès lors, avec une fine programmation des superordinateurs (par exemple, utilisation de la transformée de Fourier rapide pour diminuer la complexité d'une multiplication), il n'y a pratiquement plus de limite aux calculs des décimales de π, seulement celle de la mémoire des ordinateurs et leur disponibilité ! Le premier milliard est atteint par les frères Chudnovsky en 1989 et l'on en est aujourd'hui à 206 milliards de décimales de π connues grâce à Kanada, toujours lui. Bien sûr, π ayant un nombre infini de décimales, ce n'est même pas une goutte d'eau, mais les mathématiciens espèrent toujours remarquer, comme les frères Chudnovsky, quelque irrégularité ou propriété dans les décimales de π...

Les décimales de π à travers les ages

note : 4*2+4*3 veut dire π = 4 arctan(1/2)+4arctan(1/3), c'est la formule qui sert à calculer les décimales au moyen du développement limité d'arctangente.

NOM	DATE	Approx. ou méthode utilisée	Décimales justes
Babyloniens	-2000	3+1/8=3,125	1
Egyptiens (scribe Ahmès)	-1650	(16/9)2=3,16045	1
Chinois	-1200	3	0
Bible	-550	3	0
Archimède	-250	3,14185	3
Hon Han Shu	130		1
Ptolémée	150	377/120=3,14166	3
Chung Hing	250		1
Wang Fau	250	142/45=3,155	1
Liu Hui	264	3,14159	5
Siddhanta	380	3+177/1250=3,1416	3
Tsu Chung Chih	480?	355/113=3,141592	6
Aryabhata	499	3,14156	4
Brahmagupta	640	$\sqrt{10}$ =3,1622	1
Al-Khowarizmi	800	3,1416	3
Fibonacci	1220	3,141818	3
Al-Kashi	1429		14
Otho	1573	3,1415929	6
Viete	1593	3,1415926536	9
Romanus	1593		15
Van Ceulen	1596	méthode d' Archimède	20
Van Ceulen	1609	"	34
Grienberger	1630	"	39
Newton	1665	"	16
Sharp	1699	"	71
Seki	1700	"	10
Machin	1706	16*5-5*239 (Machin)	100
De Lagny	1719	4*2+4*3 (Euler)	112 (sur 127 calculées)
Takebe Katahiro	1723	polygone 1024 côtés	41
Matsunaga	1739		50
Vega	1794	20*7+8arctan(3/79) (Euler 1755)	140
Rutherford	1824	16*5-4*70+4*99 (Euler 1764)	152 (sur 208)
Strassnitsky, Dahse	1844	4*2+4*5+4*8 (Strassnitsky 1844)	200
Clausen	1847	8*3+4*7 (Hutton 1776)	248
Lehmann	1853	8*3+4*7	261
Rutherford	1853	formule de Machin	440
Shanks	1874	formule de Machin	527 (sur 707)
Ferguson	1945	12*4+4*20+4*1985 (Loney 1893)	539
Ferguson	1947		620
Ferguson	1948		710
Ferguson et Wrench	1948		808
Smith et Wrench	1949		1 120

Reitwiesner sur l'ENIAC	1949	formule de Machin	2 037
Nicholson et Jeenel	1954	formules d'arctan	3 092
Felton	1957	32*10-4*239-16*515 (Klingenstierna 1730)	7 480
Genuys	01-1958		10 000
Felton	05-1958	48*18+32*57-20*239 (Gauss 1863)	10 021
Guilloud	1959		16 157
Shanks et Wrench	1961	24*8+8*57+4*239 (Störmer 1896) + formule de Gauss	100 265
Guilloud et Filliatre	1966		250 000
Guilloud et Dichampt	1967		500 000
Guilloud et Bouyer	1973	formules Störmer+ Gauss	1 001 250
Miyoshi et Kanada	1981		2 000 036
Guilloud	1982		2 000 050
Tamura	1982		8 388 576
Kanada, Yoshino et Tamura	1982		16 777 206
Gosper	1985	suite de Ramanujan	17 526 200
Bailey	01-1986	algorithmes d' ordre 2 et 4 des Borwein	29 360 111
Kanada et Tamura	10-1986	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	67 108 839
Kanada, Tamura, Kobo	01-1987	"	134 217 700
Kanada et Tamura	01-1988	"	201 326 551
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1989	Suites de type Ramanujan	480 000 000
Chudnovsky et Chudnovsky	06-1989	Suites de type Ramanujan	525 229 270
Kanada et Tamura	07-1989	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	536 870 898
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1989	Suites de type Ramanujan	1 011 196 691
Kanada et Tamura	11-1989	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	1 073 741 799
Chudnovsky et Chudnovsky	08-1991	Suites de type Ramanujan	2 260 000 000
Chudnovsky et Chudnovsky	05-1994	Suites de type Ramanujan	4 044 000 000
Kanada	06-1995	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	4 294 967 286
Kanada	10-1995	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	6 442 450 938
Takahashi-Kanada	08-1997	algorithmes d 'ordre 2 et 4 des Borwein	51,539,600,000
Takahashi-Kanada	04-1999	algorithmes de Brent/Salamin et ordre 4 des Borwein	68,719,470,000
Takahashi-Kanada	20-09-1999	algorithmes de Brent/Salamin et ordre 4 des Borwein	206,158,430,000

d'après D. Bailey, J. et P. Borwein, S. Plouffe et B. Gourévitch.

Annexes

Irrationnalité de π

Irrationalité de π – démonstration de Lambert – 1761

Proposition – Soit

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{\dots}{\dots+\cfrac{a_n}{b_n+\dots}}}}$$

une fraction continue illimitée qui converge vers un nombre x. Supposons que les nombres a_i et b_i sont des entiers non nuls et tels que $|a_i|<|b_i|$ pour tout i.

(i) alors $|x|\le 1$

(ii) soit x_n le nombre vers lequel converge la fraction continue

$$\cfrac{a_n}{b_n+\cfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}+\cfrac{\dots}{\dots+\cfrac{a_{n+m}}{b_{n+m}+\dots}}}}$$

S'il n'existe aucun entier n tel que $x_n = \pm 1$, le nombre x est irrationnel.

Le résultat démontré par Lambert est le suivant :

Théorème – Si x est un nombre rationnel non nul, le nombre tg(x) est irrationnel. En particulier (x = 1), le nombre $\frac{\pi}{4}$, et donc le nombre π est irrationnel.

Démonstration du théorème

On a $$\operatorname{tg}(x)=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{\dots-\cfrac{x^2}{2n+1-\dots}}}}$$

Soit $x=\frac{p}{q}$, avec p,q entiers, q ≥ 1et p ≠ 0, un nombre rationnel non nul. Le développement de tg(x) nous donne :

$$\mathrm{tg}(x)=\cfrac{p/q}{1-\cfrac{(p/q)^2}{3-\cfrac{(p/q)^2}{\dots-\cfrac{(p/q)^2}{2n+1-\dots}}}}=\cfrac{p}{q-\cfrac{p^2}{3q-\cfrac{p^2}{\dots-\cfrac{p^2}{(2n+1)q-\dots}}}}$$

Pour tout entier n ≥ 3 tel que $p^2 < 2nq$, le développement en fraction continue

$$y_n=\cfrac{-p^2}{(2n+1)q-\cfrac{p^2}{(2n+3)q-\cfrac{p^2}{\dots-\cfrac{p^2}{(2n+m)q-\dots}}}}$$

vérifie l'hypothèse de la proposition ci-dessus. Donc $|y_n|\le 1$. Mais $y_n=-\frac{p^2}{(2n+1)q+y_{n+1}}$, donc $|y_n|\le\frac{p^2}{(2n+1)q-|y_{n+1}|}\le\frac{p^2}{2nq}<1$.

Ainsi $y_n = \pm 1$ pour tout n assez grand, ce qui d'après la proposition précédente prouve l'irrationalité de tg(x).

Transcendance de e

Soit f(x) un polynôme de degré m à coefficients réels. Posons :

$$I(t)=\int_0^t e^{t-u}f(u)du$$

On intègre m fois par parties et on obtient alors :

$$I(t)=e^t\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(t)\ \ (1)$$

Maintenant, soit f* le polynôme f où les coefficients ont été remplacés par leur valeur absolue.

En majorant les termes dans l'intégrale, on obtient :

$$|I(t)|\leq\int_0^t |e^{t-u}f(u)|du\leq|t|e^{|t|}f^*(|t|)\ \ (2)$$

Maintenant supposons e algébrique. En d'autres termes, supposons qu'il existe un entier $n > 0$ et $q_1,\dots,q_n$ non nuls tels que :

$$q_0+q_1e+\dots+q_ne^n=0\quad(3)$$

Soit $J=q_0I(0)+q_1I(1)+\dots+q_nI(n)$.

I(t) ne change pas de définition et l'on choisit $f(x)=x^{p-1}(x-1)^p\dots(x-n)^p$ avec p un grand entier premier.

En calculant J d'après la définition (1) et l'hypothèse (3), on tire :

$$J=-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} q_kf^{(j)}(k)$$

où m est donc le degré du polynôme f soit (n+1)p-1=m.

Les k variant entre 1 et n étant des racines d'ordre p chacune, on a $f^{(j)}(k)=0$ si j<p et k>0 et de même pour k=0 si j<p-1. Donc pour $j \neq p-1$ et $k \neq 0$, soit c'est nul, soit la dérivation fait sortir un p! et donc $f^{(j)}(k)$ est un entier divisible par p!. De plus, pour le cas j = p-1, par récurrence sur n, on a facilement :

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

Donc si l'on a p>n, c'est à dire p ne divisant pas n!, $f^{(p-1)}(0)$ est un entier divisible par (p-1)! mais pas par p!.

Si l'on prend alors $p>|q_0|$, J est un entier non nul qui est divisible par (p-1)! donc, évidemment, $|J|\geq(p-1)!$

Voilà une première inégalité. Le tout est maintenant de trouver une contradiction.

Pour cela, puisque $|k-n|\leq 2n$ et m = (n+1)p-1, en majorant dans f*, on obtient $f^*(k)\leq(2n)^m$ et donc si l'on utilise (2) et la définition de J,

$$|J|\leq|q_1|ef^*(1)+\dots+|q_n|ne^nf^*(n)\leq c^p$$

puisque p > n, c étant une constante indépendante de p. Si l'on choisit p suffisamment grand, la factorielle l'emportant sur la puissance, les deux inégalités sur $|J|$ se contredisent.

Transcendance de π

Toujours par l'absurde, supposons maintenant que π est algébrique et donc $\theta = i\pi$ également.

Soit d le degré du polynôme dont θ est la solution. Comme C est algébriquement clos, ce polynôme admet d racines et notons $\theta_1=\theta$, θ_2,..., θ_d toutes ces racines.

Considérons ensuite le polynôme minimal de θ, c'est à dire le plus petit polynôme (non décomposable en facteurs) dont θ est racine et dont les coefficients sont premiers entre eux, notons L son coefficient dominant, c'est-à-dire celui du terme de plus haut degré.

Sachant que $e^{i\pi}+1=0$, on peut donc écrire :

$$(1+e^{i\theta_1})(1+e^{i\theta_2})...(1+e^{i\theta_d})=0$$

Si l'on développe cette dernière expression, on obtient la somme de 2^d termes e^x, où x est un ensemble de valeurs :

$$x=a_1\theta_1+a_2\theta_2+...+a_d\theta_d \quad a_i=0 \text{ ou } 1$$

Supposons que n de ces valeurs x sont non nulles et notons les $ß_1$,...,$ß_n$.

La somme des 2^d termes s'écrit donc :

$$q+e^{\beta_1}+...+e^{\beta_n}=0 \quad (4)$$

avec $q=2^d-n$.

De même que pour e, le principe va être maintenant de trouver deux inégalités contradictoires pour $J=I(ß_1)+...+I(ß_n)$, mais avec cette fois-ci $f(x)=L^{np}x^{p-1}(x-ß_1)^p...(x-ß_n)^p$, p désignant toujours un grand nombre premier.

En utilisant (1) et (4) dans la définition de J, on obtient :

$$J=-p\sum_{j=0}^{m} f^{(j)}(0)-\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=1}^{n} f^{(j)}(\beta_k)$$

avec toujours $m=(n+1)p-1$.

Si l'on regarde de plus près la somme avec k en indice, on voit que, toutes les racines jouant le même rôle dans f(x), cette somme est un polynôme symétrique en $Lß_1$,...,$Lß_n$, c'est à dire qu'il est invariant par permutation de ces nombres.

Or le théorème d'algèbre sur les polynômes symétriques nous dit que ce genre de polynôme peut s'écrire sous la forme d'un polynôme des coefficients de l'équation dont $Lß_1$,...,$Lß_n$ sont les racines. Donc ce polynôme des coefficients est un entier, donc la somme sur k également.

Puis le même raisonnement que pour e s'applique. On a $f^{(j)}(ß_k)=0$ lorsque $j<p$, donc cette somme entière est de plus divisible par p!. En calculant à partir de l'expression de f, on remarque que c'est aussi le cas pour le rationnel $f^{(j)}(0)$ si $j \neq p-1$. Si $j = p-1$, on a :

$$f^{(p-1)}(0)=(p-1)!(-L)^{np}(ß_1...ß_n)^p$$

qui est divisible par (p-1)! mais pas par p! pour un p assez grand.

Et donc pour $p > q$, on a $|J| \geq (p-1)!$.

Mais là encore, la relation (2) nous donne la majoration :

$$|J| \leq |\beta_1| e^{|\beta_1|} f*(|\beta_1|)+...+|\beta_n| e^{|\beta_n|} f*(|\beta_n|) \leq c^p$$

avec c constante indépendante de p.

Mais les deux inégalités sont incompatibles pour un p choisi assez grand, donc $i\pi$ est transcendant, donc π est transcendant !

La quadratrice de Dinostrate

Pour la trisection de l'angle, et plus généralement pour sa n-section, on a pensé à la déduire de la division en 3 (ou n) parties égales d'un segment puiqu'on sait faire cette opération.

Soit OA = 1, considérons de point H qui décrit ce segment de A vers O d'un mouvement uniforme. D'autre part la demi-droite Oz définie par : $yOz = \theta$ tourne d'un mouvement uniforme de Oy vers Ox. H est la projection de M, point de Oz.

L'uniformité des mouvements entraîne : $\frac{\theta}{AH} =$ constante.

Soient (x,y) les coordonnées de M : M décrit un arc de courbe AMO.

$$A\begin{cases} y = 1 \\ \theta = 0 \end{cases} \qquad\qquad M_0\begin{cases} y = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On a $\frac{\theta}{AH} =$ constante, donc $\frac{\theta}{1-y} =$constante = $\frac{\pi}{2}$, et $tg\theta = \frac{x}{y}$.

L'équation de la courbe décrite par le point M est donc :

$$x = y.tg(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}y) \text{ ou } x = \frac{2}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2}y}{tg(\frac{\pi}{2}y)}$$

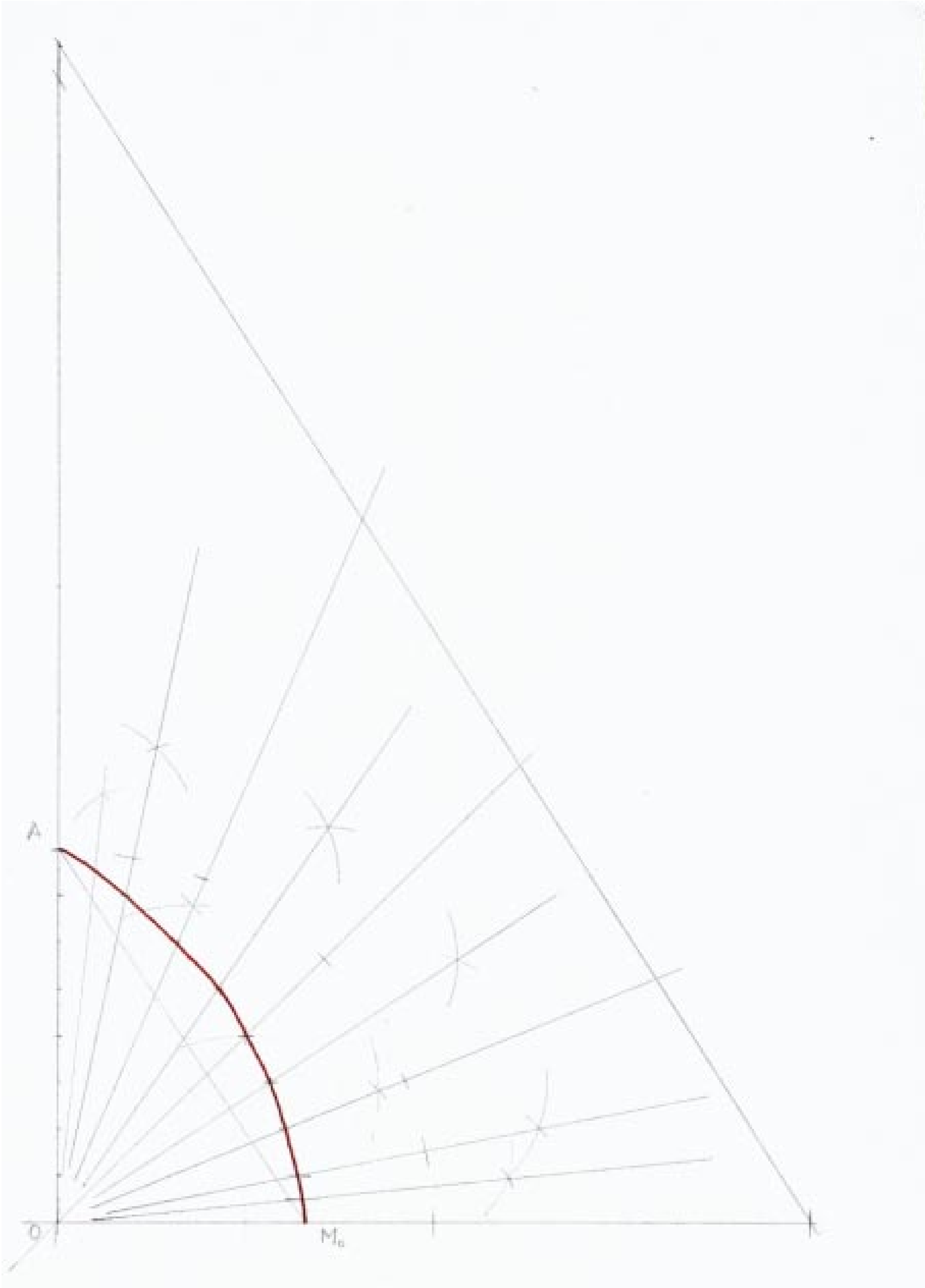
Pour construire autant de point qu'on le désire sur la courbe, il suffit de diviser OA en 2k parties égales par les milieux successifs, et yOx en 2k parties égales par des bissectrices successives. On joint les points pour tracer la courbe.

Par suite, à partir de θ1 donné, nous passons à $\theta_2 = \frac{\theta_1}{3}$ (ou $\frac{\theta_1}{n}$) en construisant $AH_2 = \frac{AH_1}{3}$ (ou $\frac{AH_1}{n}$).

De plus, quand y tend vers 0, $\frac{\pi}{2}y = \varphi$ tend vers 0, et $\frac{\varphi}{tg\varphi}$ tend vers 1, donc x tend vers $OM_0 = \frac{2}{\pi}$. Nous construisons donc π en OP en portant OB = 2 sur Ox et BP parallèle à M_0A.

Ainsi la quadrature du cercle est obtenue si la courbe est tracée.

Seulement, nous ne savons pas construire cette courbe par un tracé à l'aide de quelque appareil. Nous ne savons en construire que des points, en nombre infini, aussi rapprochés que l'on veut (formant un ensemble dense) obtenu un à un, mais, si l'on utilise la règle et le compas, ces points ne sont pas quelconques


A
O
M_o

Bibliographie

Pierre Eymard, Jean-Piere Lafon - Autour du nombre Pi - 1999

Le fascinant nombre Pi - Jean-Paul Delahaye - 1997

Numéro spécial Pi - supplément au petit Archimède n°64-65 - 1980

Boris Gourévitch - boris.gourevitch@ensai.fr - www.pi314.net - 1999

Jean-Claude Carrega - Théorie des corps La règle et le compas -1981

Marc Chamarie - Cours d'Algèbre et Théorie des Nombres, licence de Mathématiques, UCBL - 1999

Bernard Hauchecorne, Daniel Surreau - Des mathématiciens de A à Z - 1996

Table des matières

Merci à Nik Lygeros et au Groupe Spécial de Recherche

Contacts : Antoine Riche (antoine.riche@ecl2003.ec-lyon.fr)