Le nombre π est il naturel ?

travaille réalisé dans la cadres des TPE

Antoine Taveneaux

9 mars 2004

Introduction

CE DOCUMENT a été réalisé dans le cadre des TPE (travaux personnels encadrés), j'ai voulu réaliser ce document lorsque j'ai pris conscience que la masse d'informations, entrant dans ma problématique, sur ce nombre était bien trop importante, pour être traitée en quelques minutes devant un jury. Aussi j'ai voulu produire quelque chose de plus conséquent. La rédaction personnelle m'a permis d'entreprendre de vraies recherches pour réaliser un document original, et le plus complet possible (dans le cadre de la problématique et de mes compétences), mais sans prétention encyclopédique, ni atteinte d'un niveau trop élevé.

Je tiens particulièrement à remercier les professeurs qui ont encadré mon TPE, Monsieur Bottin, Monsieur Sion, Madame Genois et Monsieur Delorme qui a eu la gentillesse de m'aider. Je voudrais également remercier Monsieur Pierre Eymard qui m'a reçu très gentiment et qui m'a beaucoup aidé. Enfin je remercie tout particulièrement mon père qui m'a bien aidé pour la réalisation de ce rapport, je remercie aussi ma mère pour ses corrections et aussi Julie qui m'a fait visiter la bibliothèque universitaire et qui m'a permis d'y emprunter un document.

Cette production a été réalisée avec le programme LaTeXqui « est un traitement de texte d'une très grande puissance et produisant des documents d'une excellente qualité. Il est utilisé par beaucoup d'étudiants, de chercheurs et d'éditeurs à travers le monde », d'après Marc Baudoin de Loria (Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications). L'apprentissage de l'utilisation de ce logiciel m'a beaucoup intéressé.

Note au lecteur :
pour toutes suggestions, remarques, questions, ou des compléments d'information, à apporter sur ce travail
contactez moi :
Antoine Taveneaux : antoinetav@yahoo.fr

Table des matières

Chapitre 1

Le nombre π dans les mathématiques

1.1 Les définitions du nombre π

Tout d'abord définissons ce qu'est le nombre π. Pour beaucoup de monde ce nombre est égal à 3,1416, mais cela ne semble pas être aussi simple. De multiples définitions déférentes existent pour ce nombre. Nous allons alors voir quelques définitions de ce nombre.

1.1.1 Les définitions géométriques

Note : nous travaillerons ici et dans toutes les considérations géométriques de ce document (sauf mention explicite) dans un espace *euclidien.*

De plus nous utiliserons le signe π pour désigner des valeurs qui à priori approchent ce nombre(même si la valeur n'est pas égale à π ou à un arrondi), nous utiliserons cette notation pour éviter de complexifier les notations.

Définition première de π : la constante mathématique π est le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre (on sait démontrer que ce rapport est constant), donc en notant P, D et R respectivement le périmètre, le diamètre et le rayon d'un cercle on peut donc écrire que :

$$\pi = \frac{P}{D} \qquad \text{et} \qquad \pi = \frac{P}{2R}$$

(voir aussi les expériences au 2.1.1 page 2.1.1)

Autres définitions géométriques : on peut définir π comme le rapport de la surface sur rayon au carré d'un cercle donc en notant S et R le rayon du cercle on peut écrire que :

$$\pi = \frac{S}{R^2}$$

π est aussi égal au trois quarts du rapport du volume d'une sphère sur son rayon au cube, soit en notant R et V respectivement le rayon et le volume de la sphère, on peut écrire que (il existe une démonstration analytique assez simple de cette formule mais nous le ferons pas ici) :

$$\pi = \frac{3V}{4R^3}$$

Le nombre π est aussi le quart du rapport de la surface d'une sphère par son rayon au carré, soit en notant S et R respectivement la surface et le rayon de la sphère on peut écrire que :

$$\pi = \frac{S}{4R^2}$$

Il pourrait être intéressant aussi de trouver une valeur approchée de π par des expériences telles que remplir une sphère d'eau et de mesurer le volume d'eau ensuite et d'en déduire une valeur approchée de π, j'ai fait une expérience similaire (voir le 2.1.2 page 19)

On peut voir apparaître π aussi dans des calculs de volume ou de surface sur des tors (des anneaux en quelque sorte). Nous n'aborderons pas cela ici.

Homogénéité des ces définitions : Il est naturel qu'à la lecture de ces diverses formules, on se demande si il s'agit bien du même π dans toutes ces formules. Il existe des démonstrations pour chaque formule qui prouvent que le π est bien le « même » π que celui de la première définition (voir 1.1.1 page 4).

1.1.2 Des définitions plus abstraites

Les mathématiques modernes (à partir du début du siècle dernier) ont vu l'apparition de définitions de π plus abstraites, souvent ces définitions sont analytiques , ces dernières définitions peuvent paraître beaucoup moins poétiques et simples, pour le grand publique, que les définitions précédentes, mais elles permettent aux mathématiciens, soucieux de la rigueur, de définir rapidement ce nombre. Alors que la définition par la circonférence du cercle imposerait (pour satisfaire au critère de rigueur actuel) de développer la notion d'espace euclidien et d'autre part à présenter le calcul intégral (indispensable pour définir la longueur d'un arc).

première définition : Pour le dictionnaire des mathématiques de l'ENCYCLOPÆDIA UNIVERSALIS (voir bibliographie [1]) π est le double de l'unique racine de $\cos x = 0$ comprise entre 0 et 2, encore faut-il définir $\cos x$!

puis exponentielle,... (notion définie également dans l'ouvrage) :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{et} \qquad e^z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{ect}$$

π selon Nicolas Bourbaki : Le célèbre mathématicien éternel Nicolas Bourbaki (j'ai pu assister pendant l'année de terminale à une conférence sur l'âge d'or de ce groupe de mathématiciens) qui cultive parfois l'art de rendre compliqué ce qui est simple défini π comme le nombre réel qui apparaît dans la formule $2\pi e(x)$ de la dérivée de la fonction $e(x)$, qui est l'homomorphisme continu de groupe additif $\mathbb{R}$ sur le groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de valeur absolue 1, dont l'existence et l'unicité ont été établies précédemment. Avec $f = e(x)$ on a donc $f' = 2\pi e(x)$ (définition qui dépasse ma connaissance mathématique actuelle, mais il m'a semblé intéressant de la mentionner dans cette petite liste (non exhaustive) de définitions de π).

π dans la série d'Euler : Euler a établi au XVIII$^{\text{iem}}$ siècle que la somme des inverses des carrés des entiers naturels tend vers $\frac{\pi^2}{2}$, autrement dit :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{1.1}$$

Nous verrons plus loin une application de cette formule (voir 2.3 page 22) et nous verrons, une intuition qui peut nous conduire à ce résultat.

Transcendance de π : en effet le nombre π est transcendant, mais qu'est-ce que signifie transcendant ?

définition Le nombre réel ou complexe x est dit
- algébrique s'il existe un polynôme non nul $f(x)$ à coefficients rationnels tels que $f(x) = 0$,
- transcendant s'il n'est pas algébrique.

La transcendance de π n'a été démontrée qu'en 1882 par Lindemann (nous ne ferons pas ici la démonstration qui est d'un niveau supérieur à la terminale), cela implique que le développement décimale de π n'est pas périodique car si cela était le cas cela signifierait que l'on pourrait écrire que $\pi = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels (nous admettrons ce résultat qui est relativement simple à démontrer) et donc π serait solution de l'équation $\pi b - a = 0$ donc π ne serait pas transcendant, or la transcendance de π est démontrée,[1] donc la transcendance de π implique que ce nombre est irrationnel. Dans le cadre de la réflexion de la problématique de ce TPE on peut

[1]Historiquement l'irrationalité de π a été démontrée, en 1761 par Lambert (grâce à un résultat d'Euler), donc bien avant la transcendance de π

alors se demander si un nombre irrationnel et même transcendant est bien naturel, l'on retrouve un peu cette idée chez la fraternité pythagoricienne de la Gréce antique qui pensait que le monde était régi par les nombres et par les rapports de ces nombres, à tel point que l'apparition de nombres irrationnels (tels $\sqrt{2}$) a provoqué un chaos). De plus on peut se demander dans quelle mesure les décimales (« lointaines ») de π ont encore un sens puisque l'on sait par exemple (d'après les connaissances en astronomie actuelle) que seule les 30 premières décimales de π suffiraient à mesurer la circonférence de l'univers avec comme précision la taille d'un atome (en admettant bien sûr que l'univers soit sphérique), ainsi la problématique de ce TPE prend toute son ampleur... On peut donc se demander qu'elle est le sens physique de la milliardième décimale de π en base 10 par exemple.

1.2 Calcul d'approximation de π

Il semble qu'approcher π ait été une préoccupation humaine depuis très longtemps, mais depuis quelques années ces recherches sont devenues un véritable sport pour certaines facultés, actuellement le leader de cette compétition est le centre de calcul de l'Université de Tokyo avec à sa tête Yasumasa Kanada. Dans cette partie nous allons faire un survol historique (sans prétendre être exhaustif) puis nous étudions rapidement les algorithmes qui conduisent à ces prouesses nouvelles (voir aussi au chapitre 4).

1.2.1 Quelques éléments d'histoire de ce nombre fabuleux

π au temps de la géométrie

Petit préambule Pour plus de facilité, le langage moderne et habituel des mathématiques est utilisé ici (j'ai ici fait le choix de ne pas développer à outrance les méthodes utilisées pour obtenir ces approximations). Les par exemple Babyloniens n'écrivaient pas les nombres en décimales. Ils ne connaissaient pas la trigonométrie et utilisaient la base 60, en notation fractionnaire ($a = b + c/60 + d/60^2 ...$). Les signes opératoires n'ont été inventés que pendant la renaissance, les écritures de l'antiquité ressemblaient plus à du langage écrit qu'autre chose.

les Babyloniens : La première trace de π découverte à ce jours est attribuée aux Babyloniens il y a plus de 4000 ans. On a en effet retrouvé une tablette babylonienne, rédigée en signes cunéiformes, et l'approximation donnée est $\pi = 3 + 1/8 = 3,125$ c'est remarquable ! Ce résultat est obtenu par des considérations géométriques sur l'hexagone et des mesures expérimentales semble t-il.

les Égyptiens : Les Égyptiens eux avaient compris que la constante π dans la formule de l'aire d'un cercle et celle dans la formule du périmètre d'un cercle étaient la même(il y a environ 2700 ans!). Ils disposaient de la base 10 et connaissaient les signe + et -. Ils avaient aussi réussi à établir à la même époque que $\pi = (\frac{16}{9})^2 \simeq 3,16...$, on ignore si il savaient qu'il s'agissait que d'une valeur approché.

La Bible : La Bible, manquant un peu d'inspiration divine, pour l'occasion, fournit vers -550 av.J.C. elle aussi, 3 pour valeur de π. Le passage du fondeur Hiram et de son chaudron est resté célèbre, en voici une traduction : "Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde : elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entoure d'un cordon de trente coudées". 30/10=3, pas d'erreur.

Les Grecs : Les grecs s'intéressent à divers problèmes géométriques en relation avec la célèbre constante. Ils réfléchissent entre autre à la trisection de l'angle, la duplication du cube, et surtout la quadrature du cercle... Cette dernière fut introduite par Anaxagore de Clazomène (500-428 av.J.C.) après un séjour en prison. Ce problème consiste à construire à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas (en un nombre fini d'opérations), un carré ayant la même surface qu'un cercle donné. Ce problème a obnubilé des générations de mathématiciens, et beaucoup vont proposer des résolutions fausses ou ne respectant pas les conditions de l'énoncé. On démontrera bien plus tard que ce problème est équivalent à la transcendance de π(démontré seulement qu'en 1882, voir 1.1.2 page 6), et donc que la quadrature du cercle est impossible (ce résultat est dû entre autre à la théorie de Galois (1811-1832)).

Archimède : (Syracuse 287-212 av.J.C.)va ensuite développer une méthode de calcul des décimales du nombre π (nous verrons cette méthode au 1.2.2 page 13) et grâce à cette méthode il va calculer que $3,1408 < \pi < 3,1429$ ce qui est remarquable pour l'époque et pour les outils mathématiques dont il disposait (la trigonométrie et les décimales n'étaient pas encore apparues). Ptolémée améliorera quelque peu le résultat au moyen de tables trigonométriques.

En orient : En Inde, Aryabhata propose, vers 500 ap.J.C., 3 décimales exactes. Mais c'est en Chine où le système décimal été utilisé, que les progrès sont les plus rapides. Tsu Chung Chih semble être le premier à avoir proposé la fraction célèbre $355/113 = 3,14159292...$ vers 480 ap.J.C. soit 6 décimales. Les Arabes et Perses ne sont pas en reste puisque dans son système Hexagésimal (base 16), Al Kashi calcule avec virtuosité 14 décimales en 1429... Record pour l'époque.

Les Maya : il semble que les Mayas ait atteint un niveau de raffinement mathématique élevé. En effet les Mayas auraient bien avant leurs envahisseurs de l'ancien monde, utilisé des valeurs de π d'au moins huit décimales. Il ne s'agit là que de spéculations car Diego de Landa évêque espagnol brûla tout les documents Mayas trouvés en proclamant qu'ils ne contenaient que « des superstitions et les mensonges du Diable »...

En Europe avant l'analyse : la notation décimale commence lentement à s'imposer en Europe au Moyen Âge et c'est alors tout naturellement que l'Occident se réveille après près de 1500 ans de sommeil mathématique.

– Léonard de Pise , dit Fibonacci obtient π=3,1418... au XIII^{e} siècle.
– En 1573 en Allemagne, Valentinus Otho retrouve $\pi = 355/113$ connu des Chinois depuis le V^{e}siècle.
– En 1593 aux Pays-Bas Adriaen Von Rooman, calcule 15 décimales, en utilisant un polygone régulier de 2^{30} cotées (voir cette méthode (dit méthode d'Archiméde) au 1.2.2 page 13).
– Ludolph von Ceulen (1539-1610) professeur de mathématiques à l'université de Leyde, aujourd'hui au Pays-Bas, utilise aussi la méthode d'Archiméde pour calculer 20 décimales de π en 1596 et 34 en 1609, record absolu pour l'époque ! [2]
– Á Paris François Viète (1540-1603) partant de considérations géométriques sur la surface d'un polygone, établit la première formule de produits infinis convergents vers π :

$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}...$$

Mais cette méthode apporte peu par rapport à la méthode d'Archiméde (seulement 3 chiffres ajoutés toutes les 5 étapes, autant qu'avec Archimède).

Petite réflexion : Il est intéressant de constater l'omniprésence de ce nombre dans toute société humaine développée techniquement. On peut se demander dans quelle mesure, π n'est pas naturel puisqu'il semble que toutes les civilisations, quelque soit leur origine l'ont découvert et et on cherché a l'approcher...

Calcul de π avec l'arrivée de l'analyse :

John Wallis : (1616 - 1703) Ses manipulations de suites infinies et ses recherches sur l'aire d'un quart de cercle le poussent vers des horizons encore

[2]en Allemagne π est souvent appelé la constante de Ludolph

inconnus. Il trouve ainsi, le premier produit infini de rationnels convergeant vers π :

$$\pi = 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

La convergence est lente, mais c'est peut-être la première véritable suite de nombres rationnels convergente vers π sortie de l'analyse.

William Brouncker : (1620 - 1684) succéda à Wallis et poursuivit ces recherches et établit la célèbre fraction continue :

$$\pi = 4\cfrac{1}{1+\cfrac{1^2}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+...}}}}$$

James Gregory : (1638-1675) s'intéresse à la fonction arctan (La fonction arctan est la fonction réciproque de la fonctiontan) et a son développement en séries, il établit que (voir aussi au 1.2.2 page 16) :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

Et donc en prenant $x = 1$ on obtient la formule (bien que Gregory n'ait jamais écrit explicitement cette formule) :

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...) = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Mais hélas la convergence de cet formule est assez médiocre. Pour d'autres valeurs de x la formule de Gregory peut devenir très puissante (voir John Machin).

Leibniz et Newton : , ces deux personnages sûr joué un rôle considérable dans le développement de l'analyse, et ils créèrent de nouvelles formules intéressantes pour calculer π, mais pour éviter de donner une allure encyclopédique à ce dossier nous ne développerons pas ce thème.

John Machin : (1680 - 1751) Découvre en 1706 la formule $\pi = 4(4\arctan(1/5) - \arctan(1/239))$, en utilisant le développement de $\arctan x$ de Gregory, on obtient (car le développement de $\arctan x$ est d'autant plus rapide que x est petit) :

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^k}{(2k+1)\times 5^{2k+1}} - \frac{(-1)^k}{(2k+1)\times 239^{2k+1}} \right)$$

Cette formule est très puissante pour l'époque et permet à John Machin de calculer les 100 premières décimales de π, et une formule similaire (avec des x très petits dans le développement de $\arctan x$) permettra en 1974 de passer le premier million de décimales de π (voir aussi au 1.2.2).

Leonhard Euler : (1707 - 1783) établit que la somme des inverses des nombres naturels au carré tend vers $\frac{\pi^2}{6}$ (voir équation 1.1 page 6), il démontra même que toute les sommes du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}}$$

(avec $m \in \mathbb{N}$) font intervenir π^{2m} au numérateur. Ces sommes sont des cas particuliers de la fonction ζ de Riemann telle que :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

donc les séries évoques précédemment correspondes au cas ou s=2m.

La notation π : cet notation est apparue en 1647, avec William Oughtred et ensuite Isaac Barrow (Maître de Newton), qui employèrent cette notation. Cette abréviation n'est pas très surprenante puisque en grec la longueur de la circonférence d'un cercle s'écrit (périmètre en français) $\pi\varepsilon\rho\iota\mu\varepsilon\tau\rho\zeta$ en grec, donc π est simplement la première lettre de ce mot.

La chasse aux décimales

la course est lancée : très nombreux sont les mathématiciens qui battent des records dans le calcul du nombre de décimales de ce nombre mythique, nous ne citerons alors que D.Ferguson qui est le recordman en titre des décimales calculées à la main, il obtient 539 décimales de π, ces décimales sont publiées en 1946 (rectifiant ainsi l'erreur comise par William Shanks sur la 528$^{\text{iem}}$ décimale de son approximation).

Ramanujan : (1887 - 1920) ce génie autodidacte crée une petite révolution dans les mathématiques et surtout autour de π, à un moment où les européens commençaient a s'essouffler sur ce sujet, il crée de nombreuses formules faisant intervenir π, mais Ramanujan avait la fâcheuse habitude de ne jamais donner les démonstrations de ses formules et résultats, si bien qu'aujourd'hui encore beaucoup de ces formules et résultats sont en suspend en attendant une (nouvelle) démonstration. L'une des ces formules sur π (datant de 1914) la plus connue est sans doute :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$

Cette formule donne 8 nouvelles décimales à chaque itération. Certaines de ces formules vont permettre de battre des records par la suite(avec des ordinateurs cette fois). Ramanujan meurt malheureusement prématurément à l'âge de 33 ans.

Calcul isolé de décimales de π : en 1995 Simon Plouffe découvrit une formule qui permet de trouver de décimales isolée de π en base 2, cet formule est :

$$\pi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Cet nouvelle formule créa une petite révolutions, et ouvre peu être la voix a une nouvel génération de formules plus puissantes (cet formule a très peu d'utilité pour le calcule rapide de décimale aujourd'hui, mais elle est très innovant)

Les premières prouesses informatiques : (cet article est tiré du site internet http ://www.pi314.net/ (voir bibliographie [9]))Le record de 1946 par Ferguson s'effectua sur un calculateur de bureau à l'aide d'une des formules d'arctan. Et tous les records qui vont suivre utiliseront la même méthode pendant encore trente ans... et ils vont se succéder à un rythme assez soutenu puisque aux 536 décimales de Ferguson, et aux 2037 décimales calculées sur l'ENIAC, premier véritable ordinateur, en 1949, on arrive à 1 million de décimales en 1973 avec Guilloud. On suit là simplement les progrès des ordinateurs mais la méthode n'a pas changé, on utilise toujours la formule de Machin ou bien ses dérivées.

Une nouvelle méthode de calcul : Les formules de Ramanujan et d'autres formules qui apparurent (celles des frères browein par exemple) avaient le fâcheux inconvénient de demander énormément d'opérations pour obtenir seulement quelques décimales en plus. Mais en En 1976, Eugène Salamin et Richard Brent publient, indépendamment l'un de l'autre, un article chacun, sur une nouvelle méthode de calcul des décimales de π. Ce nouvel algorithme est basé sur la moyenne arithmético-géométrique étudiée par Gauss , et cette algorithme à une convergence quadratique, c'est à dire que le nombre de décimales exactes double à chaque itération :

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \qquad \text{et} \qquad \lim_{m \to \infty} U_m = \pi$$

Ainsi cette formule, ou des formules similaires, permettent de battre de nouveaux records, grâce à une programmation puissante des calculateurs grâce à la mise au point de méthodes de multiplications rapides. Il existe aujourd'hui des algorithmes qui permettent de multiplier par 3,4,5,7,9 ou par 16 le nombre de décimales exactes à chaque itération, mais ces algorithmes ne sont pas forcement plus puissants pour le calcul effectif (ces formules ont été développées par les frères Browein, voir 4.3 page 34).

La liste de mathématiciens travaillant à établir des formules est trop longue pour être donnée ici, nous limiterons donc à la liste précédente.

Tableau des records de calcul de décimales de π par informatique :
Ce tableau est inspiré de celui de la page internet
`http://www.mines.inpl-nancy.fr/~tisseran/cours/pi/` ,et de celui du livre Le Fascinant nombre π (voir bibliographie [3]) les records étant battu relativement régulièrement, je ne peut m'engager sur la validité du tableau, mais aux yeux de la communauté scientifique a ce jour (9 mars 2004) ce tableau est à jour (voir page 14).

1.2.2 Quelques algorithmes, ou méthodes de calcul

Nous allons ici expliquer quelques méthodes de calcul, et nous en démontrerons certaines (celles pour lesquelles la démonstration reste accessible).

La méthode de duplication d'Archimède

Nous en avons déjà parlé dans l'historique (voir au 1.2.1 page 8), Archimède développa une méthode révolutionnaire pour estimer π. Il a l'idée de construire des polygones réguliers extérieurs et intérieurs à un cercle de rayon donné et d'en calculer les périmètres. Il en déduit une valeur approchée de π en fonction de l'encadrement obtenu, bien sûr l'approximation est d'autant plus précise que le nombres de cotés des deux polygones est grands (puisque les périmètres des deux polygones convergent vers une même limite qui est le périmètre du cercle (nous ne le démonterons pas ici mais ces suites sont adjacentes)). Mais Archimède ne s'arrête pas là, il réussit à trouver une méthode qui lui permet de passer des périmètres des polygones à n côtés à celui des deux polygones à 2n côtés (restant bien sûr inscrits et exinscrits au cercle). Archimède part d'un polygone a 6 côtés (un hexagone donc), il obtient donc le résultat suivant[3] :

Théorème : Pour tout entier $n \geq 0$, soit a_n (resp. b_n) le demi périmètre du polygone régulier à 6.2^n cotées exinscrit (resp. inscrit) dans le cercle de

[3]Archimède ne disposait pas de cette notation mais avait compris ce théorème

Tab. 1.1 – Records de calcul de décimales de π par ordinateur

Année du record	nom	nombre de décimales
1946	Ferguson	620
1/1947	Ferguson	710
1948	Ferguson& Wrench	808
1949	Smith& Wrench	1 120
1949	Reitwiesner&al.	2 037
1954	Nicholson& Jeenel	3 092
1957	Felton	7 480
1/1958	Genuys	10 000
5/1958	Felton	10 021
1959	Guilloud	16 167
1961	Shanks& Wrench	100 265
1966	Guilloud& Filliatre	250 000
1967	Guilloud& Dichampt	500 000
1973	Guilloud& Bouyer	1 001 250
1981	Miyoshi& Kanada	2 000 036
1982	Guilloud	2 000 050
1982	Tamura	2 097 144
1982	Tamura& Kanada	8 388 576
1982	Kanada,yoshino& Tamura	16 777 206
1985	Gosper	17 526 200
1/1986	Bailey	29 360 111
10/1986	Tamura& Kanada	67 108 839
1/1987	Tamura,Kanada,Kobo& al	134 217 700
1/1988	Tamura& Kanada	201 326 551
5/1989	Chudnovsky& Chudnovsky	480 000 000
7/1989	Tamura& Kanada	536 870 898
8/1989	Chudnovsky& Chudnovsky	1 011 196 691
11/1989	Tamura& Kanada	1 073 741 799
8/1991	Chudnovsky& Chudnovsky	2 260 000 000
5/1994	Chudnovsky& Chudnovsky	4 044 000 000
8/1995	Kanada	4 294 967 286
10/1995	Kanada	6 442 450 938
7/1997	Kanada& Takahashi	51 539 600 000
7/1999	Kanada& Takahashi	206 158 430 000
12/2002	Kanada& Takahashi	1 241 100 000 000

rayon un. On a les formules de récurrence :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad ; \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

Qui commencent par :

$$a_0 = 2\sqrt{3} \quad ; \quad b_0 = 3$$

Démonstration : (cette démonstration a bien sûr peu de choses à voir avec celle qu'en fit Archimède) Soit AB (resp. CD) un côté d'un polygone régulier à 6.2^n côtées exinscrit (resp. inscrit)et soit 2θ l'angle au centre correspondant ; donc θ est l'angle au centre des polygones à 6.2^{n+1} côtés. On a $OC = OH = 1$ et $AH = \tan\theta$,$CK = \sin\theta$ donc

$$\begin{cases} a_n = 3.2^{n+1}\tan\theta & b_n = 3.2^{n+1}\sin\theta \\ a_{n+1} = 3.2^{n+2}\tan\frac{\theta}{2} & b_{n+1} = 3.2^{n+2}\sin\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

donc

$$a_0 = 6\tan\frac{2\pi}{6} = 2\sqrt{3} \quad ; \quad b_0 = 6\sin\frac{2\pi}{6} = 3$$

puis

$$\frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} = 3.2^{n+2}\frac{\sin\theta\tan\theta}{\sin\theta + \tan\theta} = 3.2^{n+2}\tan\frac{\theta}{2} = a_{n+1}$$

et

$$a_{n+1}b_n = 3^2.2^{2n+3}\tan\frac{\theta}{2}\sin\theta = 3^2.2^{2n+4}\sin^2\frac{\theta}{2} = (b_{n+1})^2$$

ce qui vérifie bien le Théorème.

Rapidité : l'on sait démontrer que l'intervalle $\delta_n = a_n - b_n$ est au moins divisé par 4 à chaque itération, mais pas beaucoup mieux. Comme $\frac{\log 10}{\log 4} \simeq \frac{5}{3}$, donc on gagne approximativement 3 chiffres décimaux en 5 étapes. On gagne donc moins d'un chiffre décimal par étape. Pour bien se rendre compte de la rapidité de convergence établissons les quelques premiers encadrements, du type $b_n < \pi < a_n$, nous utiliserons bien sûr des valeurs approchées si nécessaire :

$$3 < \pi < 3,464101$$

$$3,105828 < \pi < 3,215390$$

$$3,132628 < \pi < 3,159659$$

$$3,139350 < \pi < 3,146086$$

$$3,141031 < \pi < 3,142714$$

Les formules d'arctan

La fonction arctan est la fonction réciproque de la fonctiontan, c'est à dire que $\arctan x$ est l'angle θ compris dans $[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan\theta = x$

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment Gregory démontra que :

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \tag{1.2}$$

(Nous ne démonterons pas ici cette formule) Cette formule nous permet donc de conclure que pour $x = 1$:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \tag{1.3}$$

Mais hélas la formule 1.2 converge très lentement pour de grandes valeurs de x (pour $x = 1$ il faut aller jusque 1/100 001 pour obtenir 3,1416... soit 3 décimales exactes), mais cette formule converge rapidement pour des petites valeurs de x d'ou l'idée d'exprimer $\arctan 1$ en une somme de arctan

Demonstration des formules d'arctan : Nous admettrons la formule bien connue :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Établissons par exemple la formule suivante :

$$\arctan\frac{1}{n} = \arctan\frac{1}{n+p} + \arctan\frac{p}{n^2+np+1} \tag{1.4}$$

Calculons alors

$$\tan\left(\arctan\frac{1}{n+p} + \arctan\frac{p}{n^2+np+1}\right) = \frac{\dfrac{1}{n+p} + \dfrac{p}{n^2+np+1}}{1 - \dfrac{1}{n+p} \times \dfrac{p}{n^2+np+1}} =$$

$$= \frac{n^2+np+1+np+p^2}{n^3+n^2p+n+n^2p+np^2+p-p} = \frac{1}{n}$$

Ce qui démontre bien 1.4.

Ainsi on peut écrire que :

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{p} + \arctan\frac{p}{p+2}$$

Ainsi, en utilisant 1.2 on obtient par exemple

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

et grâce à 1.2 on a :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^{2k+1}}$$

cette formule converge bien plus rapidement que pour $\arctan x$, en effet j'ai fait des calculs et j'obtient :

$$4\left(\sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^{2k+1}} \right) \simeq 3,14159267045...$$

Soit 7 décimales exactes (alors que avec 1.3 il fallait aller jusque 1/100 001 pour obtenir 3 décimales exactes).

Grâce à cette méthode on peut obtenir des séries très puissantes qui convergent très rapidement vers π. Des calculs similaires à celui fait au dessus nous permettent d'obtenir la formule :

$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan \frac{1}{57} + 7 \arctan \frac{1}{239} - 12 \arctan \frac{1}{682} + 24 \arctan \frac{1}{12943}$$

et l'on sait démontrer que cette formule est la plus puissante des formules de ce type.

Chapitre 2

Les expériences réalisées

Des photos réalisées pendant les expériences figurent à la fin de ce chapitre.

2.1 Les expériences basées sur les définitions géométriques de π

2.1.1 Á partir de la définition du périmètre du cercle :

J'ai réalisé une expérience dans le cadre de mon TPE en mesurant grâce à une ficelle le périmètre d'un disque (un CD) et en mesurant le diamètre du disque (sur une feuille de papier millimétré), cette expérience me donne $P = 38,3$cm et $D = 12,1$cm ce qui donne une approximation $\pi = \frac{383}{121} \simeq 3,165...$, calculons alors l'erreur relative,

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\frac{383}{121} - \pi}{\pi} \simeq 0,00754... \qquad \text{soit moins de 0,8\%}$$

ce qui est une relativement bonne approximation étant donné la faible précision des mesures.

J'ai ensuite eu l'idée d'essayer d'améliorer la précision de cette mesure, en mesurant la longueur à parcourir pour faire plusieurs tours du cercle par rapport au périmètre du cercle. J'ai d'abord essayé avec une roue de vélo (un monocycle plus exactement, mais j'ai ensuite essayé avec d'autres systèmes de roue, et j'ai obtenu des résultats semblables), j'ai fait faire 6 tours à la roue, la distance totale parcourue (mesurée) est $D = 929,3$cm et le diamètre de la roue (mesuré) est $49,7$cm on obtient donc une approximation de

$$\pi = \frac{929,3}{6 \times 49,7} \simeq 3,1163$$

calculons alors l'erreur relative

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\pi - \dfrac{929,3}{6 \times 49,7}}{\pi} \simeq 0,008$$

soit prés de 0,8%. Il est surprenant de constater que l'erreur relative entre « la méthode du CD » (en mesurant avec une ficelle le périmètre d'un CD) et celle de la roue est la même. En effet le périmètre du cercle varie en fonction du rayon, donc ce n'est pas parce qu'on augmente le rayon qu'on aura une meilleure précision dans la mesure, en effet, l'imprécision dans la mesure reste la même et donc l'approximation ne s'améliore pas.

Un paradoxe ? Le résultat précèdent peut paraître surprenant au premier abord, un autre phénomène parait surprenant et même quelque peu paradoxal pour certains, ces deux phénomènes sont dus à la même propriété du périmètre d'un cercle (celle de varier directement avec le rayon du cercle). Réalisons alors mentalement cette expérience, imaginons que la terre soit parfaitement sphérique et qu'une corde en fasse le tour par l'équateur, imaginons alors que l'on souhaite pouvoir partout soulever d'un mètre la corde autour de la terre (que la corde soit comme un anneau équatorial à un mètre du sol), quelle distance de corde faut-il ajouter à la corde pour obtenir cela ?... 2π mètres en effet la corde a une taille totale initiale de $2\pi R$ ou R est le rayon terrestre en mètre, alors si le rayon devient $R + 1$ alors la taille de la corde sera de $2\pi(R+1) = 2\pi R + 2\pi$ soit $2\pi m$ de plus qu'avant... surprenant non ?

2.1.2 L'expérience avec le volume de la sphère

Pour cette expérience, je me suis muni de billes de caoutchouc, et d'une éprouvette gradué, j'ai introduit 6 billes de caoutchouc (assimilées à des sphères) de rayon de $1,5$cm, l'augmentation de volume d'eau a été de 90 ml. On peut donc tirer une valeur approchée de π de cette expérience ; si l'on admet la formule

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

où V est le volume de la sphère et R le rayon, alors on peut écrire que pour notre expérience on a

$$V = 90 = 6\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 6\left(\frac{4}{3}\pi 1,5^3\right) = 27\pi$$

Donc

$$\pi = \frac{90}{27} \simeq 3,3333...$$

l'erreur relative est

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} \simeq 0,061...$$

soit 6% ce qui est relativement important. Il proviens sans doute de la difficulté de lecture du au ménisque et a la petitesse des sphères. L'on peut noter ici que comme le volume varie au cube du rayon, une augmentation de rayon provoque un accroissement très rapide du volume, donc ici si l'imprécision des mesures est un pourcentage constant, il pourrait être intéressant d'augmenter le rayon de la sphère pour obtenir une valeur de π plus précise, si l'imprécision des mesures est linéaire. Je n'ai pas pu le faire car je n'ai pas trouvé de sphères suffisamment régulières et grosses pour réaliser l'expérience.

2.2 L'expérience des aiguilles de Buffon

2.2.1 Explication de l'expérience :

L'expérience consiste a jeter des aiguilles de taille a sur un réseau de lignes parallèles régulièrement écarté d'une distance b (un plancher bien régulier et plat par exemple). On sait alors démontrer que le rapport du nombre d'intersections entre les lignes parallèles et le nombre de lancés tend vers (voir démonstration au 2.2.4)

$$P = \frac{2a}{\pi b}$$

quand le nombre d'aiguilles lancées tend vers l'infini.

2.2.2 La réalisation de l'expérience :

J'ai réellement réalisé cette expérience. J'ai donc mis au point un protocole expérimental (voir à la suite), et j'ai ainsi lancé 525 aiguilles de 4,5 cm et j'ai obtenu 336 intersections avec les lignes parallèles distantes de 4,5cm. Ce qui donne l'approximation

$$\frac{2}{\pi} = \frac{336}{525} \quad \text{soit} \quad \pi = \frac{2 \times 525}{336} = 3,125$$

Soit une erreur relative d'un peu plus de 0,5%. Ce résultat est très raisonnable (eu égard au nombre de lancés l'approximation obtenue est très fine, car cette méthode converge très lentement vers π).

2.2.3 Protocole expérimental :

Pour réaliser cette expérience j'ai établi un protocole expérimental : les lancés se sont fait à une hauteur de 1 m par rapport à la zone d'atterrissage (énormément d'aiguilles rebondissaient tellement fort qu'elles sortaient de la zone, à peine la moitié ont atterri sur la zone), les aiguilles avaient une taille de $a = 4,5$cm et le réseau de lignes parallèles était réalisé sur une feuille format A3 et les ligne parallèles étaient distantes de $b = 4,5$cm

2.2.4 Démonstration de la méthode :

Démontrons alors que si $a = b$ (cas de l'expérience réalisée, nous considérerons que l'aiguille ne peut pas couper deux lignes parallèles,donc que a est très légèrement inférieur à b) alors la probabilité pour qu'une aiguille coupe une ligne du réseau de lignes parallèles soit :

$$P = \frac{2}{\pi}$$

Démontrons alors cette propriété, avec P la probabilité que l'aiguille coupe l'une des lignes du réseau, nous prendrons $a = b = 1$ mais on considère impossible que l'aiguille de taille a coupe deux lignes du réseau de ligne. On note E l'une des extrémités de l'aiguille et F l'autre extrémité. Le point E se situe entre deux droites que nous notons D_1 et D_2 (puisque l'on a supposé que une aiguille ne pouvait pas couper deux lignes parallèles).

Intéressons-nous à la probabilité P_1 que EF coupe D_1. On notera y la distance entre E et D_1. Il faudra ensuite multiplier P_1 par 2 pour obtenir la probabilité recherchée P (car EF peut couper D_1 ou D_2).
On note x l'angle entre EF et la direction du réseau de droites parallèles orientées, et on note y la distance entre E et la droite orientée D_1. L'angle x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$. On voit que l'aiguille coupe D_1 si $y < a \times \sin x = \sin x$
la probabilité recherchée P_1 est le rapport entre l'aire A_1 correspondant aux cas « favorables » d'intersection, les cas oú :

$$y < a \times \sin x$$

et l'aire A_2 correspondant à tous les cas possibles les cas oú :

$$-\pi \leq x \leq +\pi \qquad 0 \leq y \leq b$$

Ainsi l'on suppose ici que x et y peuvent prendre toute les valeurs sans aucune « sans aucune préference »
Alors $P_1 = \frac{A_1}{A_2}$, or on a :

$$A_1 = \int_0^\pi a \sin x \; dx = -a \cos \pi + a \cos 0 = 2a$$

$$A_2 = 2\pi b$$

d'où on obtient :

$$P_1 = \frac{a}{\pi b} \qquad \text{donc} \qquad P = \frac{2a}{\pi b}$$

et comme $a = b$ alors

$$P = \frac{2}{\pi}$$

Ce résultat se généralise, en effet, l'on sait démontrer que pour toute aiguilles de longueur a et tout réseau de lignes parallèles, avec les lignes distantes d'une distance constante b entre deux lignes, alors le nombre moyen d'intersections sur le nombre d'aiguilles lancées tend vers

$$P = \frac{2a}{\pi b}$$

2.2.5 D'autres expériences réalisées sur ce même principe :

D'autres personnes ont réalisé cette même expérience, donnons quelques résultats :
- en 1850 Wolf lance 5 000 et obtient une approximation de $\pi = 3,1596$
- en 1855 Smith d'Aberdeen lance 30 204 et obtient $\pi = 3,1553$
- en 1864 le capitaine Fox lance 1030 aiguilles et obtient $\pi = 3,1595$
- Sur le site http ://www.jura.ch/lcp/cours/dm/buffon/ il existe un simulateur de cet expérience qui en génèrant des nombres aléatoires, simule cet expérience par informatique.

Beaucoup d'expériences des aiguilles de Buffon furent réalisées, en effet cette expérience est assez fascinante car elle fait apparaître π là où on ne l'attend pas. Mais la convergence dans cette expérience est très lente en effet on estime que pour avoir de grandes chances (dans 95% des cas) d'arriver à une précision de l'ordre du millième il faut lancer environ 900 000 aiguilles.

Mais comme le fit remarquer N.Grindgeman cette expérience peut être la source d'une escroquerie intellectuelle. En effet si par exemple l'on choisi $a = 78,5398$cm et $b = 1$m, donc la probabilité donnée par la formule de Buffon est $\frac{2\times 0,785398}{\pi}$, alors en lançant seulement deux aiguilles, une qui coupe une ligne et une qui n'en coupe aucune, on tire l'approximation $\pi = 4 \times 0,785398 = 3,141592$ ce qui n'est pas mal du tout, mais cet précision incroyable proviens de la mesure de a qui cache π, en quelque sort.

2.3 Mon expérience avec la radioactivité

2.3.1 Explication de l'expérience :

Un théorème (voir justification au 2.3.5) affirme que deux nombres entiers tirés chacun au hasard ont une probabilité de $\frac{6}{\pi^2}$ d'être premiers entre eux (d'avoir un PGCD égal à un). Cela m'a suggéré l'idée d'une expérience, j'avais entendu que les fonctions génératrices de nombres aléatoires mathématiques n'étaient pas parfaitement fiables, j'ai eu alors l'idée de générer de grands nombres aléatoire grâce à la mesure de l'activité de la radioactivité d'une source radioactive. Ainsi on peut calculer une valeur approchée de π grâce à des nombres par une mesure dans le monde naturel. Nous allons donc essayer de développer cela.

2.3.2 Les fonctions random :

Les fonctions random (mathématiques) utilisées dans les ordinateurs gênèrent en réalité des nombres pseudo-aléatoires. En réalité ce sont des algorithmes qui vont produire une suite de nombres qui à priori n'ont pas de rapport entre eux (nous ne définirons pas rigoureusement cette notion). En général ces suites sont des suites récurrentes avec congruence, de la forme :

$$x_{n+1} \equiv ax_n + b \text{ (mod m)}$$

Ces suites sont généralement suffisamment erratiques pour être considérées comme aléatoires. Ces suites présentent tout de même un problème, dés que l'on tombe sur un nombre déjà atteint une fois alors la suite devient périodique ($x_{n+k} = x_n$ si la période de la suite est k), les générateurs de nombres aléatoires des ordinateurs de bureau ont généralement une période de l'ordre de 65 000, alors que les stations de calcul ont des périodes dépassant $2^{128} \simeq 3.10^{38}$. On peut donc ainsi comprendre que les nombres aléatoires générés de cette manière ne sont pas totalement aléatoires (bien que cela suffise largement pour mon expérience). J'ai donc souhaité les générer par un moyen réputé totalement aléatoire : une source radioactive.

2.3.3 Expérience pour obtenir des nombres aléatoires

Rapide introduction à la radioactivité

Nous avons vu au cours de cette année de terminale (en physique) que les sources radioactives émettent un rayonnement qui dépend du nombre de désintégrations d'atomes instables par seconde dans un échantillon radioactif. Ces désintégrations sont totalement imprévisibles.

Les noyaux des atomes (les nucléides) sont constitués de neutrons et de protons, ces deux particules s'appellent les nucléons. La stabilité d'un nucléide est due à la compétition entre l'interaction forte, et de l'interaction électromagnétique. la stabilité des noyaux obéit aux lois de la physique quantique, et un noyau possédant trop de particules d'un même type est instable. Ainsi un noyau possédant trop de protons ou trop de neutrons est instable :

- un noyau possédant plus de 350 nucléons ne peut être stable (selon nos connaissances actuelles).
- Un noyau contenant beaucoup plus de protons que de neutrons ne peut être stable
- et un noyau possédant beaucoup plus de neutrons que de protons est instable

Ainsi un noyau instable peut se désintégrer pour redevenir stable (par perte (ou gain) de charge ou de masse), et avoir une plus grande énergie de liaison par nucléon, selon la courbe d'Aston. Lorsque un noyau se désintègre 3 types de particules peuvent être émises :

– une particule α qui est un noyau d'hélium (2 protons et 2 neutrons)
– une particule β qui peut être β^- ou β^+, qui sont respectivement un électron et un positron, ce rayonnement correspond à une perte (ou à un gain) de charge mais à une conservation des masses
– un rayonnement γ qui correspond à l'émission d'un rayonnement électromagnétique d'extrêmement haute fréquence, ce rayonnement correspond à la désexitation du noyau.

Enfin nous avons vu qu'il était totalement impossible de prévoir la désintégration d'un noyau instable. Donc sur une population il est impossible de prévoir le nombre de désintégrations en un temps donné.

C'est ce caractère aléatoire qui nous permet donc de générer des nombres parfaitement aléatoires.

L'expérience :

J'ai alors eu l'idée de générer des nombres aléatoires grâce à une telle source, puisque les fonctions random ne semblent pas parfaitement fiables. J'ai alors attendu l'arrivée du compteur Geiger, qui a été acheté en cours d'année par le lycée. Ce compteur Geiger capte et donc compte le nombres de particules α et β et les radiations γ. J'ai pu ainsi effectuer des comptages grâce à la source radioactive dont dispose le lycée (Ra^{226}). Je fus alors confronté à un problème, en effet l'ordre de grandeur des nombres était toujours le même, donc mes nombres obtenus n'étaient alors pas équirépartis sur $\mathbb{N}$ (borné bien sûr, sinon l'on obtient des valeurs qui tendent vers l'infini), J'ai donc choisi de ne conserver que le chiffre des unités pour des comptages de 10s (j'ai ici admis que ces nombres sont réellement aléatoires), et de rassembler ensuite en groupes de 5 chiffres qui forment des assez grands nombres, qui sont suffisants pour notre expérience. J'ai ainsi pu obtenir 40 nombres de 5 chiffres chacun ce qui me permet d'obtenir $C_{40}^2 = \frac{39(39+1)}{2} = 780$ couples de nombres sur lesquels on peut tester leur primalité, j'ai fait traité cela automatiquement par ordinateur (par excel). Et ainsi j'obtiens une valeur approchée :

$$\pi = \sqrt{6 \times \frac{780}{480}} = 3,12249899...$$

calculons alors l'erreur relative

$$\frac{\Delta\pi}{\pi} = \frac{\pi - \dfrac{780}{480}}{\pi} \simeq 0,006 \qquad \text{soit à peine plus de 0,6\%}$$

cette fois encore on peut se féliciter de la convergence rapide (presque trop rapide), en effet cette méthode a en principe une convergence très lente.

2.3.4 Une méthode auto réfèrente :

Avant que le lycée ne reçoive le compteur Geiger, j'avais très envie de faire déjà un essai de cette méthode, mais je ne savais pas comment générer des nombre aléatoires sans problème, j'ai alors eu l'idée de prendre des décimales de π en les supposant aléatoires (voir cette question ci-après) et créé des nombres à partir de blocs de 10 décimales, ainsi j'ai créé 20900 couples dont j'ai pu tester la primalité (toujours avec la même méthode), et j'ai obtenu une approximation qui est $\pi = 3,1593547...$ soit une erreur relative de 0,18% , ce qui est faible, cela s'explique par le grand nombre de couple de nombre traité.

Problème du caractère aléatoire des décimales de π, les décimales de π, sont assez méconnue aujourd'hui dans leur généralité, comme nous l'avons vu, nous savons démontrer que ce nombre est transcendant, et donc irrationnel et que donc son développement décimal n'est pas périodique. Mais mis à part cela on ne sait que bien peu de choses, on a aucune idée sur le fait que les décimales de π puissent constituer une suite de nombres aléatoires (les valeurs approchées les plus grandes tendent à le montrer sur les valeurs calculées jusqu'à ce jour). Mais par exemple on ne peut pas dire aujourd'hui si le chiffre 7 apparaît un nombre infini de fois dans le développement décimal (à l'infini) de π, on ne sait que bien peu de choses à ce sujet, donc l'hypothèse faite dans mon expérience précédente (que les chiffres de π constituent une suite aléatoire) est loin d'être évidente. Cet hypothèse n'est donc qu'une supposition.

2.3.5 Quelques éléments de justifications de ce résultat mathématiques

Tout d'abord je tiens à préciser que les démonstrations qui sont dans ce paragraphe ne sont en aucun cas prétendues rigoureuses, elles ont simplement pour objet de « faire sentir » le résultat au lecteur.

Tentons de montrer tout d'abord que [1] :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour ce faire nous utiliserons la formule connue (ou supposée tel) :

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + ...$$

[1]Cette explication est inspirée de celle de Pierre Eymard, que l'on trouve dans le livre, « autour du nombre π » dont il est coauteur (voir dans la bibliographie [2]), et il m'a personnellement expliqué cette démonstration lors de l'entretien qu'il a bien voulu m'acorder en janvier 2004

il est alors clair que les racines de cette série sont les nombres $x = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, ...$ donc en posant $y = x^2$, les racines de l'équation

$$0 = 1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - ... + (-1)^n \frac{y^n}{(2n+1)!} + ... \tag{2.1}$$

sont $y = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, ...$ Or si le second membre de 2.1 était un polynôme, la somme des inverses des racines serait égale à l'opposé du coefficient de y. Faisons comme s'il en allait de même pour l'équation 2.1, dont le second membre est une série entière, non un polynôme ; on aurait

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ... + \frac{1}{(n\pi)^2} + ... = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Cette formule fut ensuite démontrée rigoureusement par Euler mais ici, ce raisonnement fait apercevoir le bien fondé du résultat.

Montrons alors que la probabilité p_1 que deux nombres entiers u et v soient premiers entre eux est $\frac{6}{\pi^2}$, (ce résultat est attribué à Cesaro (1859 - 1906)) donc que :

$$p_1 = \text{Prob}(PGCD(u;v)) = \frac{6}{\pi^2} \qquad u, v \in \mathbb{N}$$

(la démonstration qui suit n'est pas rigoureux mais la formule est bien entendu juste).

Notons alors u et v deux entiers naturels, k un entier naturel et p_k la probabilité de l'événement $PGCD(u;v) = k$.

Puisque nous travaillons dans $\mathbb{N}$,non borné, d peut prendre toute valeur et par conséquent, l'événement certain est :

$$PGCD(u;v) = 1, \text{ ou } 2, \text{ ou } 3, ..., \text{ ou } k, ...$$

donc l'on obtient

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + ... + p_k + ... = 1 \tag{2.2}$$

Il nous faut donc évaluer p_k pour tout $k > 1$ et $k \in \mathbb{N}$.

Dire que $PGCD(a;b) = k$, c'est dire qu'il existe deux entiers m et n premiers entre eux tels que $a = mk$ et $b = nk$.
Ainsi :

$$\text{Prob}(PGCD(a;b) = k) = \text{Prob}(a = mk \quad \text{et} \quad b = nk \quad \text{et} \quad PGCD(m;n) = 1)$$

Donc

$$\text{Prob}(PGCD(a;b) = k) = \text{Prob}(a = mk) \times \text{Prob}(b = nk) \times \text{Prob}(PGCD(m;n) = 1)$$

La dernière probabilité écrite est p_1
Recherchons la probabilité pour que $a = mk$. Dans la division de a par k il peut y avoir k restes : de 0 à $k-1$. a sera multiple de k dans le seul cas où $a \equiv 0(\mod k)$. Donc la probabilité cherchée est $\frac{1}{k}$,il en va de même pour $b = nk$. Alors

$$\text{Prob}(PGCD(a;b) = k) = \frac{p_1}{k^2}$$

Ainsi 2.2 devient

$$p_1 + \frac{p_1}{2^2} + \frac{p_1}{3^3} + ... + \frac{p_1}{k^2} + ... = 1$$

donc

$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + ... + \frac{1}{k^2} + ...}$$

or comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

alors

$$p_1 = \frac{6}{\pi^2}$$

Cette démonstration n'est pas rigoureuse, l'erreur vient du fait que l'on ne peut définir une loi de probabilité sur un ensemble infini, puisque chaque élément aurait une probabilité nulle d'apparaître. Pour choisir ces nombres aléatoires, nous avons dû borner l'ensemble $\mathbb{N}$ (dans l'expérience nous n'avons pas de nombre de plus de 5 chiffres). Nous n'entrerons pas plus dans les détails sur cela. Il existe des preuves rigoureuses mais nous ne les aborderons pas ici.

Chapitre 3

Le nombre π dans la physique

3.1 Problème de l'espace Euclidien en physique

Le nombre π se définit à l'origine dans un espace Euclidien. Mais le monde physique est-il Euclidien ? La relativité générale d'Einstein énonce que le monde physique ne l'est pas. Le nombre π a t-il un sens en physique ? l'on peut répondre à cela que π est le rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre lorsque le diamètre tend vers 0. Cette définition reste valable dans un espace tel que le décrit la relativité. Comme je l'ai déjà évoqué il pourrait être intéressant de distinguer les expériences (qui font apparaître π) qui nécessitent que l'espace soit Euclidien et celles qui ne l'exigent pas (par exemple dans l'expérience des aiguilles de Buffon il est admis que les aiguilles se répartissent aléatoirement or la présence d'objet gravitationel empêche cette répartition uniforme). Je ne rentrerai pas plus dans les détails ici, mais il semble qu'avec les expériences physiques il soit pratiquement impossible de dépasser les 10 décimales de précisions.

3.2 π dans les expériences physiques

Nous évoquerons ici seulement des expériences physiques, mais nous ne ferons pas les démonstrations, souvent longues (d'autant plus que certaines sont en partie dans les livres de physique terminale S (voir dans la bibliographie [6]))

3.2.1 Les pendules simples

Un pendule simple est un dispositif constitué d'une masse suspendue par un battant (de masse négligeable), et la masse est susceptible d'osciller si l'on écarte le battant de la verticale.

L'on peut établir que si l'on note L la longueur du battant d'un pendule simple en mètres et g ($g = 9,81 m.s^{-2}$ à Paris) d'accélération gravitationelle à laquelle est soumise le pendule en $m.s^{-2}$, et t la période en seconde, alors on peut écrire que

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Ainsi en mesurant la durée de plusieurs périodes d'un pendule simple on peut obtenir une valeur approchée de π, bien sûr si l'on souhaite obtenir une assez bonne précision, il est nécessaire de connaître le plus finement possible g. Je n'ai pas réaliser cette expérience par manque de temps et car je n'ai pas réussi à me procurer une valeur fiable de g à Laxou.

3.2.2 Dans un circuit LC

Nous ne définirons pas le circuit LC, déjà défini en cours de physique. Nous avons vu en physique cette année que les oscillations électriques dans un circuit LC, ont une période

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

avec T la période en seconde, L l'inductance en henrys de la bobine du circuit LC, et C la capacité en farad du condensateur. Ainsi l'on peut réaliser une expérience qui permettrait de mesurer π grâce a un montage électrique. Malheureusement encore une fois le temps m'a fait défaut et je n'ai pas réussi à me procurer rapidement un appareil pouvant mesurer de façon fiable l'inductance et la capacité du condensateur, je n'ai donc pas réaliser cet expérience.

3.2.3 Le nombre π et les fleuves

J'ai pu lire sur internet (voir bibliographie [11]) que le rapport de la longueur d'un fleuve sur la distance réelle qui sépare la source de l'embouchure est π. Cela m'a beaucoup intéressé, j'ai alors essayé de savoir ce qui permet d'établir ce résultat, mais j'ai simplement trouvé que cette loi, postulée par Einstein est constatée par Hans-Hendrick Stolum, spécialiste des sciences de la Terre. Je n'ai pas pu trouver de démonstration, ou tentative d'explication à ce sujet. Le site internet cité précédemment signale simplement que :

- La formation de méandres tend à s'amplifier du fait du courant créé sur la rive externe.
- Elle est limitée dans la mesure où des méandres trop prononcés entraîneraient des courts-circuits.
- La rivière prendrait alors au plus court en évitant le méandre.
- L'équilibre se trouve pour un rapport moyen de π, surtout pour les rivières de plaines au relief doux.

Je n'ai pas retrouvé ce résultat par ailleurs, l'on peut alors se poser la question de la fiabilité de l'information. De plus le nom de Hans-Hendrick Stolum semble inconnu sur internet (par google). La question de l'existence réelle de ce fait peut alors se poser.

J'ai alors essayer de constater ce résultat par moi-même, j'ai alors trouver la longueur (approchée !) des grands fleuves (Danube, Nil, Gange, Mississippi et Amazone). Grâce à mon atlas j'ai mesuré les distance à vol d'oiseaux, et j'ai ainsi obtenu pour ce rapport $\frac{62900}{25153} \simeq 2,5$, (je ne fais pas ici les calculs qui présentent peu d'intérêt) la valeur est tout de même assez éloignée de π, mais cela mériterait d'être approfondi me semble t-il, car cette valeur n'est pas fondamentalement éloigné de π non plus.

Ce phénomène semble très intéressant et entre dans le cadre de mon TPE car il s'agirai bien d'une manifestation concrète de π, et une fois de plus là où on ne l'attend pas. Mais je n'ai malheureusement pas plus explorer cette voix faute de temps et aussi d'informations fiables à ma disposition.

Chapitre 4

Ressources

Dans cette partie j'ai voulu y faire figurer quelques formules n'ayant pas trouvées leur place dans le développement de ce fascicule (ou simplement pour les rappeler). Cette partie n'a pas vocation d'être encyclopédique, la liste de formules n'est donc pas exhaustive (le plus souvent une seule ou quelques formules représentatives du travail du mathématicien seront données).

4.1 Les formules d'origine géométrique

4.1.1 Archimède

(287 av.J.C. - 212 av.J.C.)(voir aussi au 1.2.2 page 13)

$$U_0 = \frac{1}{2} \qquad V_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - U_n^2}\right)} \qquad V_{n+1} = \frac{-1 + \sqrt{1 + V_{n+1}}}{V_n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 6.2^n U_n = \pi \qquad \lim_{n \to +\infty} 6.2^n v_n = \pi$$

4.1.2 Fibonacci

(1180 - 1250)
soit la suite (U_n) la suite de Fibonacci, elle se définit par

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \qquad U_0 = 1 \quad \text{et} \quad U_1 = 1$$

on a alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\left(\frac{U_{n+1}}{U_{n+2}}\right)^{2k+1} + \left(\frac{U_n}{U_{n+3}}\right)^{2k+1} \right)$$

4.1.3 Al Kashi

(? - 1429)

$$C_0 = 1 \qquad C_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - C_n^2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 3.2^n.C_n = \pi$$

4.1.4 Wallis

(1616 - 1703)

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

4.2 Les formules d'origine analytique

4.2.1 Quelques fractions continues

$$\pi = 4 \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + ...}}}}$$

$$\pi = 2 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{2} + \cfrac{1}{\frac{1}{3} + \cfrac{1}{\frac{1}{4} + ...}}}}$$

Il en existe bien d'autres encore

4.2.2 Machin

(1680 - 1751) (voir aussi au 1.2.2 page 16)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)3^{2k+1}}$$

4.2.3 Gauss

(1777 - 1855)

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}\left(12\left(\frac{1}{18}\right)^{2n+1} + 8\frac{1}{57}\right)^{2n+1} - 5\frac{1}{239}\Bigg)^{2n+1}\Bigg)$$

4.2.4 Ramanujan

(1887 - 1920) Quelques formules célèbres de ce génie.

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{((2n)!)^3(42n+5)}{2^{12n+4}(n!)^6} \qquad \pi = 4\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!(1123+21460n)}{2^{10n+1}(n!)^4(441)^{2n+1}}\right)^{-1}$$

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4(396)^{4n}}\right)^{-1}$$

4.2.5 G. et D. Chudnovsky

$$\pi = \frac{1}{12}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(6n)!(13591409+545140134n)}{(3n)!(n!)^3(640320^3)^{n+\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$$

4.2.6 Plouffe

Cette formule est révolutionnaire et permet de calculer des chiffres isolés de π (voir aussi au 1.2.1 page 12)

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6}\right)$$

4.2.7 Chebyshev

Ce genre de formules s'appelle les Polynômes de Chebyshev

$$U_1 = \frac{99}{100} \qquad U_2 = \frac{4801}{5000} \qquad U_n = \frac{99}{50}U_{n-1} - U_{n-2}$$

$$V_1 = \frac{99}{4780} \qquad V_2 = \frac{11414399}{11424200} \qquad U_n = \frac{99}{2390}V_{n-1} - V_{n-2}$$

$$\pi = 8\sum_{4n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{10^{2n-1}(2n-1)}\left(4U_{2n-1} - V_{2n-1}\right)$$

4.3 Les algorithmes moderne :

Ces algorithmes sont des algorithmes à convergence très rapide, ces algorithmes sont apparus au XX$^{\text{ième}}$ siècle (le nombre de décimales exact double, triple ou quadruple ... ou plus, à chaque itération), c'est avec ces algorithmes que les nouveaux records de calculs de décimales sont battus.

4.3.1 Salamin/Brent

$$a_0 = 1 \qquad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$U_m = \frac{4a_m^2}{1 - 2\displaystyle\sum_{n=1}^{m} 2^n (a_n^2 - b_n^2)} \quad \text{et} \quad \lim_{m \to \infty} U_m = \pi$$

4.3.2 J et P.Borwein

J et P.Borwein sont deux frères très prolifiques pour produire ce type d'algorithmes. Pour illustrer leur travail je propose alors l'algorithme à convergence « hexadécimalique » (d'ordre 16 !, le nombre de décimales exact est multiplié par 16 à chaque itération), on ne fait pas mieux actuellement.

$$\alpha_0 = \frac{1}{3} \quad s_1 = \sqrt{2} - 1 \quad s_1^x = \left(1 - (s_1)^4\right)^{\frac{1}{4}} \quad s_{n+1} = \frac{(1 - s_n^x)^4}{(t+u)^2(t^2+u^2)}$$

avec

$$m_1 = \left(\frac{1 + s_n}{t}\right)^4 \quad m_2 = \frac{1}{t^4} \quad t = 1 + s_1^x \quad u = \left[8 s_1^x (1 + (s_1^x)^2)\right]^{\frac{1}{4}} \quad s_n^x = \left(1 - (s_n)^4\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\alpha_n = 16 m_1 \alpha_{n-1} + \frac{4^{2n-1}}{3}(1 - 12 m_2 - 4 m_1) \qquad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = \frac{1}{\pi}$$

Bibliographie

[1] Dictionaire des Mathématiques algébre, analyse, géométrie Edition Encyclopædia Universalis, Albin Michel, 1997.

[2] P.Eymard et J.P. Lafon : Autour du nombre π, édition Hermann 2000.

[3] J.P. Delahaye : Le fascinant nombre π, édition BELIN Pour la Science, 2000.

[4] Un siècle de mathématiques à Nancy, article Autour du nombre π, édité par l'institut Élie Cartan, 2003.

[5] Daniel Saada, Bulletin d'union des physiciens n°705 article « Mouvement d'un pendule simple »

[6] Manuel de physique de terminale S : physique $\mathrm{T}^{\mathrm{erm}}$S programme 2002, Bordas collection GALILEO.

[7] Nicolas Bourbaki, Éléments de mathématiques. Fonction d'une variable réelle, Hermann, Paris, 1976

[8] Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein, Pi : a Source Book, Springer Verlag (Août 1997)

[9] Site internet consacré à π, http ://www.pi314.net/

[10] Site qui simule l'expérience des aiguilles de Buffon http ://www.jura.ch/lcp/cours/dm/buffon/

[11] Site internet sur des curiosités concernant le nombre π http ://membres.lycos.fr/villemingerard/Geometri/PiCurios.htm

[12] Une page internet où l'on trouve un article sur les nombres aléatoires et les fonctions random : http ://www.hsc.fr/ressources/articles/nombre/index.html.en

[13] La partie pédagogique du site du CEA (Commissariat à l'Energie Atomique), qui traite de la radioactivité http ://www.cea.fr/fr/pedagogie/science.htm

Index